Universidade de Aveiro Departamento de Engenharia Civil
2011

André Oliveirinha Monteiro

DESENVOLVIMENTO DE UM PROGRAMA DE CÁLCULO DE SECÇÕES DE BETÃO ARMADO

Universidade de Aveiro Departamento de Engenharia Civil
2011

André Oliveirinha Monteiro

DESENVOLVIMENTO DE UM PROGRAMA DE CÁLCULO DE SECÇÕES DE BETÃO ARMADO

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil, realizada sob a orientação científica do Doutor Paulo Barreto Cachim, Professor Associado do Departamento de Engenharia Civil da Universidade de Aveiro e a co-orientação do Doutor Miguel Nuno Lobato de Sousa Monteiro de Morais, Professor Auxiliar do Departamento de Engenharia Civil da Universidade de Aveiro.

o júri

presidente

Profª. Doutora Margarida João Fernandes de Pinho Lopes
professora auxiliar do Departamento de Engenharia Civil da Universidade de Aveiro

Prof. Doutor Miguel Ângelo Carvalho Ferraz
professor auxiliar da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

Prof. Doutor Paulo Barreto Cachim
professor associado do Departamento de Engenharia Civil da Universidade de Aveiro

Prof. Doutor Miguel Nuno Lobato de Sousa Monteiro de Morais
professor auxiliar do Departamento de Engenharia Civil da Universidade de Aveiro

agradecimentos

A realização desta dissertação não seria possível sem todos aqueles que, de forma directa ou indirecta, contribuíram com o seu apoio.

Á minha família, pela importante força e apoio.
Aos amigos, pela união e companheirismo.
À Márcia, pela ajuda e compreensão nos momentos mais difíceis.
Aos professores Paulo Cachim e Miguel Morais, pelo entusiasmo incutido para superar os problemas surgidos.

A todos… muito obrigado!

palavras-chave

betão armado, dimensionamento, verificação da segurança, estados limites últimos, flexão desviada, programação orientada a objectos, modelação numérica, método das fibras.

resumo

Esta dissertação tem por objectivo o desenvolvimento de um programa informático, o *XCoSec*, destinado ao dimensionamento e verificação da segurança de secções transversais de betão armado, em estado limite último, segundo o disposto no Eurocódigo 2. Pretendeu-se que a aplicação fosse o mais universal possível, ou seja, que englobasse a maioria dos casos, admitindo por isso a possibilidade de considerar secções de geometria qualquer, definida pelo utilizador, sujeitas a diversos tipos de esforços (flexão simples, composta e desviada, esforço transverso e torção).

A aplicação foi idealizada por forma à sua utilização ser expedita e intuitiva. Para isso, desenvolveu-se uma interface gráfica que facilita a introdução de dados, possibilitando o uso de secções e materiais predefinidos. Desenvolveram-se ferramentas que permitem visualizar gráficos de interacção de esforços resistentes, para situações de flexão composta e desviada, como a elaboração da superfície tridimensional de flexão desviada sob forma de ábaco.

Os materiais predefinidos no programa foram descritos e caracterizados a nível mecânico, através das leis constitutivas de comportamento definidas no Eurocódigo 2. Foram também expostas as bases teóricas que, de acordo com esse documento, fundamentam os cálculos executados pelo programa.

A linguagem de programação adoptada para o desenvolvimento do programa foi a linguagem orientada a objectos C#, que deu um forte contributo à versatilidade do produto final. Foi realizado um breve enquadramento acerca da temática da programação orientada a objectos, em particular da linguagem adoptada.

Recorrendo ao programa, foram resolvidos alguns casos práticos, validando os resultados manualmente, com recursos a tabelas e ábacos existentes, de forma a comprovar o correcto funcionamento do programa.

Por fim, foi elaborado um manual de utilização do programa, onde se explica o modo de utilização da aplicação.

keywords

rainforced concrete, design, safety check, ultimate limit states, biaxial bending, object oriented programming, numerical modeling, fiber method.

abstract

The purpose of this dissertation is the development of software, named *XCoSec*, to design and check the safety of reinforced concrete cross section in ultimate limit states, according with Eurocode2. It was intended that the application was as universal as possible so that it could cover the majority of cases, including the possibility to consider any user-defined cross section shape, under various types of loads (biaxial bending, shear and torsion).

The software was designed to be quick and intuitive. Therefore, a graphical interface that facilitates data entry, with the possibility to use predefined cross section shapes and materials was developed. Tools have been created to determine and show interaction graphics that define the ultimate strength for axial/biaxial bending cases. One of them is the representation of the three-dimensional surface of biaxial bending through abacuses.

The mechanical behaviour of predefined materials was described and characterized using constitutive laws defined in Eurocode 2. Theoretical basis were also exposed in accordance to this document that underlies the calculations performed by the program.

The adopted programming language was C#, an object oriented language, which give a good contribution to the final product versatility. A brief overview about object oriented programming was made, focusing particularly on the adopted language.

Some practical cases were solved with the software and the results validated with hand calculations, and also using existing tables and abacuses.

Finally, an user's manual was created, that explains how to use the software correctly.

ÍNDICE GERAL

1. Introdução 1

1.1. Enquadramento 1
1.2. Objectivos 2
1.3. Metodologia 3

2. Enquadramento Teórico 5

2.1. Caracterização dos Materiais 5
2.1.1. Betão 5
2.1.2. Aço 6
2.2. Formulação Teórica 9
2.2.1. Noção de equilíbrio estático e de segurança 9
2.2.2. Equações de equilíbrio 9
2.2.3. Distribuição de extensões em estado limite último 10
2.2.4. Método da Secante 12

3. Verificação da Segurança 13

3.1. Flexão Composta Desviada 13
3.1.1. Método de verificação da segurança 13
3.1.2. Diagrama de interacção tridimensional de flexão desviada 14
3.1.3. Determinação das curvas de interacção M_y - M_z 15
3.1.4. Determinação dos esforços resistentes – Método das Fibras 15
3.2. Esforço Transverso 25

4. Dimensionamento 27

4.1. Flexão Simples 27
4.1.1. Secção rectangular 27
4.1.2. Secção em T 29
4.1.3. Secção Circular 30
4.2. Flexão Composta Desviada 32
4.3. Esforço Transverso 32

4.3.1. Secção Rectangular 34
4.3.2. Secção em T 34
4.3.3. Secção circular 37
4.4. Torção 38

5. Linguagem de Programação 41

5.1. Programação Orientada a Objectos 41
5.1.1. Classe 42
5.1.2. Abstracção 42
5.1.3. Encapsulamento 43
5.1.4. Herança 43
5.1.5. Polimorfismo 43
5.2. Características da Linguagem 44

6. Programa *XCoSec* 47

6.1. Iniciar o Programa e um Novo Cálculo 47
6.2. Funcionalidades do Programa 50
6.2.1. Tipos de análise 50
6.2.2. Secções disponíveis 50
6.2.3. Esforços 50
6.2.4. Materiais 51
6.3. Resultados do Programa 51
6.3.1. Verificação da segurança 51
6.3.2. Dimensionamento 54
6.4. Parâmetros de Cálculo 56

7. Exemplos Práticos 57

7.1. Exemplo 1 – Verificação da segurança de uma secção circular sujeita à flexão desviada e esforço transverso. 57
7.2. Exemplo 2 – Verificação de uma secção irregular sujeita à flexão desviada 59
7.3. Exemplo 3 – Dimensionamento de uma secção rectangular sujeita à flexão desviada e esforço transverso 61

7.4. Exemplo 4 – Dimensionamento de uma secção em T sujeita à flexão composta e esforço transverso 64

8. Considerações Finais 67

8.1. Conclusões 67

8.2. Desenvolvimentos Futuros 67

Referências Bibliográficas 69

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Diagrama parábola-rectângulo para o betão comprimido segundo o EC2. 6

Figura 2. Diagramas tensão-extensão do aço de armaduras para betão armado. 7

Figura 3. Diagramas bilineares tensões-extensões, idealizado e de cálculo, do aço para armaduras de betão armado (traccionado ou comprimido). 8

Figura 4. Distribuição de extensões admissíveis em estado limite último (NP EN 1992-1-1, 2010). 10

Figura 5. Exemplo da determinação da raiz de uma função $f(x)$ através do método da secante, com representação das duas primeiras secantes obtidas. 12

Figura 6. Diagrama de interacção tridimensional de flexão desviada genérico, com exemplo de uma secção transversal em três situações, baseado em Lejano (2007). 14

Figura 7. Diagrama de interacção tridimensional de flexão desviada com esquematização de uma das curvas de interacção My-Mz possíveis de obter. 15

Figura 8. Exemplo da discretização de uma secção rectangular e parâmetros necessários a execução do método, baseado em Lejano (2007). 16

Figura 9. Definição e discretização computacional de uma secção de betão armado. 17

Figura 10. Determinação das fibras comprimidas. 18

Figura 11. Distância na perpendicular entre os pontos comprimidos de betão e o e.n. 19

Figura 12. Exemplo de um diagrama de extensões da secção genérica. 20

Figura 13. Exemplo de um diagrama de tensões no betão da secção genérica. 21

Figura 14. Distância na perpendicular entre as armaduras e o e.n… 22

Figura 15. Exemplo de um diagrama de extensões e tensões no aço. 23

Figura 16. Mudança de referencial e novas posições dos pontos discretizadores. 24

Figura 17. Secção rectangular sujeita à flexão simples, em estado limite último (Walther e Miehlbradt, 1990). 27

Figura 18. Determinação da armadura de compressão. 29

Figura 19. Secção em T sujeita à flexão simples, em estado limite último. 29

Figura 20. Secção circular sujeita à flexão simples, em estado limite último..... 30

Figura 21. Modelo de treliça usado na análise do esforço transverso (NP EN 1992-1-1, 2010)..... 33

Figura 22. Ligação dos banzos com a alma – Notações (NP EN 1992-1-1, 2010)..... 36

Figura 23. Notações e definições utilizadas neste capítulo..... 39

Figura 24. Aspecto da janela de abertura do *XCoSec*. 47

Figura 25. Aspecto da janela principal do *XCoSec*. 48

Figura 26. Janelas de selecção da secção. Em a) verificação da segurançae em b) dimensionamento. 49

Figura 27. Janela principal do *XCoSec* com várias tarefas iniciadas em simultâneo..... 49

Figura 28. Exemplo da modelação de uma secção de forma irregular..... 51

Figura 29. Exemplo de um diagrama de flexão composta de uma secção em T (dimensões em m)..... 52

Figura 30. Exemplo de um diagrama de flexão desviada de uma secção em T (dimensões em m)..... 53

Figura 31. Exemplo de um ábaco de flexão desviada de uma secção em T (dimensões em m). 53

Figura 32. Janela de introdução do intervalo ΔNRd, para o traçado dos ábacos de flexão desviada..... 54

Figura 33. Resultados obtidos após o dimensionamento de uma secção rectangular (dimensões em metros)..... 55

Figura 34. Janela de definição de parâmetros com exemplo de dois separadores de ajuste. 56

Figura 35. Esquema da secção circular a verificar (dimensões em metros). 57

Figura 36. Introdução de dados no programa (exemplo 1). 58

Figura 37. Diagrama de interacção de flexão composta da secção circular (exemplo 1). .. 59

Figura 38. Esquema da secção oval a verificar (dimensões em metros). 59

Figura 39. Introdução de dados no programa (exemplo 2). 60

Figura 40. Diagrama de interacção My - My da secção oval (exemplo 2). 61

Figura 41. Esquema da secção rectangular a dimensionar (dimensões em m)..... 61

Figura 42. Secção rectangular após dimensionamento à flexão desviada. 62

Figura 43. Introdução de dados no programa (Exemplo 3). 63

Figura 44. Diagrama de interacção My-Mz da secção dimensionada (exemplo 3). 63

Figura 45. Esquema da secção a dimensionar (dimensões em m)..... 64

Figura 46. Secção em T após dimensionamento à flexão composta. 65

Figura 47. Introdução de dados no programa (Exemplo 4). 65

Figura 48. Diagrama de interacção My - N da secção dimensionada (exemplo 4)..... 66

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1. Classes de betão disponíveis no programa e parâmetros associados. 5

Tabela 2. Equações usadas na determinação da extensão em cada fibra da secção. 11

LISTA DE SÍMBOLOS

Letras latinas

A_c	área da secção transversal de betão comprimido
A_{sl}	área da secção das armaduras longitudinais
A_{sw}	área da secção das armaduras de esforço transverso
D	diâmetro exterior
E_{cm}	módulo de elasticidade secante do betão
E_s	valor de cálculo do módulo de elasticidade do aço das armaduras
F_c	força de compressão no betão
F_p	força normal nas armaduras de pré-esforço (tracção ou compressão)
F_s	força normal nas armaduras ordinárias (tracção ou compressão)
$M_{y,Ed}$ e $M_{z,Ed}$	valor de cálculo do momento flector actuante segundo y e z
$M_{y,Rd}$ e $M_{z,Rd}$	valor do momento flector actuante segundo y e z
N_{Ed}	valor de cálculo do esforço normal actuante (tracção ou compressão)
N_{Rd}	valor do esforço normal resistente (tracção ou compressão)
T_{Ed}	valor de cálculo do momento torsor actuante
$T_{Rd,max}$	valor de cálculo do momento torsor resistente máximo na secção
V_{Ed}	valor de cálculo do esforço transverso actuante
$V_{Rd,c}$	valor de cálculo do esforço transverso resistente do elemento sem armadura de esforço transverso
$V_{Rd,max}$	valor de cálculo do esforço transverso resistente máximo do elemento, limitado pelo esmagamento das escoras comprimidas
$V_{Rd,s}$	valor de cálculo do esforço transverso equilibrado pela armadura de esforço transverso na tensão de cedência

b	largura total de uma secção transversal
b_w	largura da alma de vigas em T
c	recobrimento mecânico das armaduras
d	altura útil de uma secção transversal
$f_{0,2k}$	valor característico da tensão limite convencional de proporcionalidade a 0.2 %, à tracção, do aço das armaduras para betão armado
f_{cd}	valor de cálculo da tensão de rotura do betão à compressão
f_{ck}	valor característico da tensão de rotura do betão à compressão aos 28 dias de idade obtido em provetes cilíndricos
$f_{ck,cube}$	valor característico da tensão de rotura do betão à compressão aos 28 dias de idade obtido em provetes cúbicos
f_{tk}	valor característico da tensão de rotura à tracção do aço das armaduras para betão armado
f_{yd}	valor de cálculo da tensão de cedência à tracção do aço das armaduras para betão armado
f_{yk}	valor característico da tensão de cedência à tracção do aço das armaduras para betão armado
f_{ywd}	valor de cálculo da tensão de cedência do aço das armaduras de esforço transverso
h	altura total de uma secção transversal
x	profundidade do eixo neutro
z	braço do binário das forças internas

Letras gregas

α_{cc}	coeficiente que tem em conta os efeitos de longo prazo na resistência à compressão e os efeitos resultantes do modo como a carga é aplicada
γ_c	coeficiente parcial de segurança relativo ao betão

γ_s	coeficiente parcial de segurança relativo ao aço
ε_c	extensão do betão à compressão
ε_{c2}	extensão no betão quando atingida a resistência máxima
ε_{cu2}	extensão última do betão à compressão
ε_s	extensão do aço
ε_{ud}	extensão limite do aço à tracção para armaduras de betão armado
ε_{uk}	valor característico da extensão do aço da armadura para betão armado ou de pré-esforço na carga máxima
ν	coeficiente de redução da resistência do betão fendilhado por esforço transverso
ρ_l	taxa de armaduras longitudinais
σ_c	tensão de compressão no betão
σ_{cp}	tensão de compressão no betão devida a um esforço normal ou ao pré-esforço
σ_s	tensão de compressão no betão

Abreviaturas e acrónimos

B.A.	Betão Armado
CAD	*Computer Assisted Design*
EC2	Eurocódigo 2
E.L.U.	Estado Limite Último
e.n.	eixo neutro
OOP	*Object-Oriented Programming*
XCoSec	*Xpress Concrete Section*

1. INTRODUÇÃO

O presente trabalho consiste no desenvolvimento de uma aplicação informática, denominada *XCoSec - Xpress Concrete Section*, que permite o cálculo expedito de secções de betão armado relativamente ao estado limite último, de acordo com o estipulado com o Eurocódigo 2.

1.1.Enquadramento

Desde o aparecimento dos primeiros computadores pessoais, nos anos 70, que a sociedade actual sofreu fortes e evidentes mudanças. Como é sabido, estes permitem realizar tarefas muito diversas, desde que se tenham previamente programado aplicações adequadas. Estas aplicações, ou programas, são conjuntos ordenados de instruções que descrevem os passos a dar pelo computador perante um conjunto de dados do problema. Uma vez escrito um programa, qualquer pessoa pode usá-lo para resolver problemas previstos pelo programador, introduzindo dados, sem necessidade de saber como funciona ou quais as bases que usa. Contudo, é importante que o utilizador perceba exactamente para que tipo de problemas foi concebido, tendo conhecimento acerca dos processos implementados e sobre os resultados devolvidos, de forma a possibilitar o uso adequado das suas potencialidades.

São indiscutíveis os benefícios que a computação trouxe à engenharia civil. Desde aplicações simples de cálculo expedito, programas de desenho, análise de custos, planeamento, até aos programas de elementos finitos de análise e dimensionamento de estruturas. A citação de todos os programas disponíveis no mercado formaria uma lista interminável. Toda esta panóplia, cada um com características e fins próprios, permitiu uma drástica diminuição do tempo necessário à realização dos trabalhos de engenharia, beneficiando todas as áreas deste avanço tecnológico. Árduas tarefas de cálculo analítico de esforços, dimensionamento, ou desenho estão agora à distância de um clique, primando na qualidade final.

Uma vez que o cálculo de secções de betão armado é uma tarefa muito frequente no âmbito do projecto de estruturas, torna-se de elevada utilidade, a existência de ferramentas expeditas que visam, quer o dimensionamento, quer a verificação da segurança e análise

das mesmas. Assim, o desenvolvimento de um programa informático que reúna essas características, trás um forte contributo para a execução dessas tarefas, não só em situação de projecto, mas também no apoio a exercícios académicos.

1.2. Objectivos

Pretende-se com o programa desenvolvido, o cálculo de secções de geometria qualquer, sujeitas a esforços de flexão biaxial, esforço axial e, para algumas situações, esforço transverso e torção. Idealizou-se uma aplicação o mais universal possível, de forma a englobar a generalidade dos casos prováveis de surgir, onde, para além de se considerarem secções genéricas, se possam ajustar os parâmetros de cálculo prescritos no EC2.

O *XCoSec* contempla duas das principais tarefas correntes no campo do cálculo de secções de betão armado: a verificação da segurança e o dimensionamento, ambos os casos para a situação estado limite último (E.L.U.). Para além da obtenção de resultados numéricos, pretende-se a obtenção de resultados gráficos relativamente à flexão composta/desviada, sob forma de diagramas e ábacos de interacção, definindo a resistência de uma secção através de curvas. Um deles consiste na visualização da superfície tridimensional de flexão desviada sob forma de ábaco. Tanto os diagramas, como os ábacos, são válidos para uma determinada secção, com geometria e armadura definida, sendo possível a sua exportação sob forma de ficheiro de imagem.

Pretende-se que a utilização do *XCoSec* seja expedita e intuitiva sem que tal prejudique a fiabilidade dos resultados. Para isso, desenvolve-se uma interface gráfica que facilita a introdução de dados, com possibilidade para usar secções e materiais previamente definidos. Apesar da fácil utilização, é imperativo que os utilizadores possuam conhecimentos básicos acerca do cálculo orgânico de betão armado e das prescrições estipuladas no EC2.

Em suma, pretende-se elaborar um programa de cálculo que visa cumprir os seguintes objectivos:

- Efectuar a verificação da segurança e dimensionamento de secções em E.L.U. segundo o EC2;
- Abranger os principais esforços possíveis de existir numa secção de B.A.;
- Gerar diagramas/ábacos de interacção de flexão composta/desviada exportáveis em ficheiro de imagem;

- Desenvolver uma interface gráfica intuitiva e de utilização expedita;
- Disponibilizar secções correntes e materiais predefinidos;
- Permitir o ajuste de parâmetros de cálculo, segundo as necessidades do utilizador.

1.3.Metodologia

O presente trabalho inicia-se com um enquadramento teórico acerca dos materiais e princípios de cálculo considerados. Assim, no Capítulo 2 são definidos os materiais, betão e aço, através das suas leis constitutivas de comportamento e são expostos os princípios fundamentais considerados.

No capítulo 3 apresentam-se os métodos de cálculo relativos à verificação da segurança de secções transversais. São descritos os processos implementados em relação à flexão desviada e ao esforço transverso.

O Capítulo 4 descreve os métodos de cálculo adoptados, relativamente ao dimensionamento de secções transversais. Apresenta os processos de cálculo implementados para o dimensionamento à flexão simples e composta desviada, ao esforço transverso e à torção.

O capítulo 5 tem por objectivo introduzir a filosofia de funcionamento da linguagem de programação usada. De forma a proporcionar uma fácil leitura e entendimento, comparam-se as diversas propriedades da linguagem, com exemplos práticos do quotidiano.

No Capítulo 6, descreve-se o programa desenvolvido – o *XCoSec*. São apresentadas todas as suas funcionalidades, os tipos de secções, os esforços possíveis de considerar e os resultados devolvidos.

De forma a exemplificar a utilização do *XCoSec*, resolveram-se alguns exemplos práticos de situações correntes. Assim, o capítulo 7 expõe quatro exemplos de cálculo: a verificação da segurança de uma secção circular, a verificação da segurança de uma secção irregular definida pelo utilizador (oval), o dimensionamento de uma secção rectangular e o dimensionamento de uma secção em T.

Por fim, no Capítulo 8, são expostas as considerações finais e propostos alguns desenvolvimentos que poderão ser realizados no futuro, em seguimento do presente trabalho.

2. ENQUADRAMENTO TEÓRICO

No presente capítulo são apresentados os fundamentos teóricos adoptados na concepção do código computacional. São definidos os materiais disponíveis no programa, as suas propriedades (segundo o EC2) e os princípios que irão servir de base à resolução dos problemas impostos.

2.1. Caracterização dos Materiais

2.1.1. Betão

Cada tipo de betão é caracterizado pela sua classe de resistência, que se relaciona com o valor característico (quantilho de 5%) da resistência à compressão, referido a provetes cilíndricos, f_{ck}, ou a provetes cúbicos, $f_{ck,cube}$, de acordo com a EN206-1. Segundo o EC2, as classes de resistência baseiam-se no valor característico da resistência, referido a provetes cilíndricos, determinado aos 28 dias, compatível com um valor máximo recomendado $C_{\max}$ = C90/105 (f_{ck} = 90 MPa e $f_{ck,cube}$ = 105 MPa).

Os valores característicos, f_{ck}, e as correspondentes características mecânicas necessárias ao cálculo, estão indicados na Tabela 1.

Tabela 1. Classes de betão disponíveis no programa e parâmetros associados.

Classes de Resistência do Betão														
f_{ck} (MPa)	12	16	20	25	30	35	40	45	50	55	60	70	80	90
$f_{ck,cube}$ (MPa)	15	20	25	30	37	45	50	55	60	67	75	85	95	105
ε_{c2} (‰)	2,0									2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
ε_{cu2} (‰)	3,5									3,1	2,9	2,7	2,6	2,6
n	2,0									1,75	1,6	1,45	1,4	1,4
E_{cm} (GPa)	27	29	30	31	33	34	35	36	37	38	39	41	42	44

Segundo o EC2, o valor de cálculo da tensão de rotura à compressão, f_{cd}, a usar é definido pela Expressão 1.

$$f_{cd} = \alpha_{cc} \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \tag{1}$$

em que:

γ_c coeficiente parcial de segurança relativo ao betão (para o estado limite último, o valor indicado no EC2 é de 1,5).

α_{cc} coeficiente que tem em conta os efeitos de longo prazo na resistência à compressão e os efeitos desfavoráveis resultantes do modo de aplicação da carga (deve situar-se entre 0,8 e 1, porém o valor recomendado é 1).

As relações tensões-extensões no betão a considerar na determinação dos esforços resistentes para verificação do estado limite último de resistência (E.L.U.) estão representadas na Figura 1.

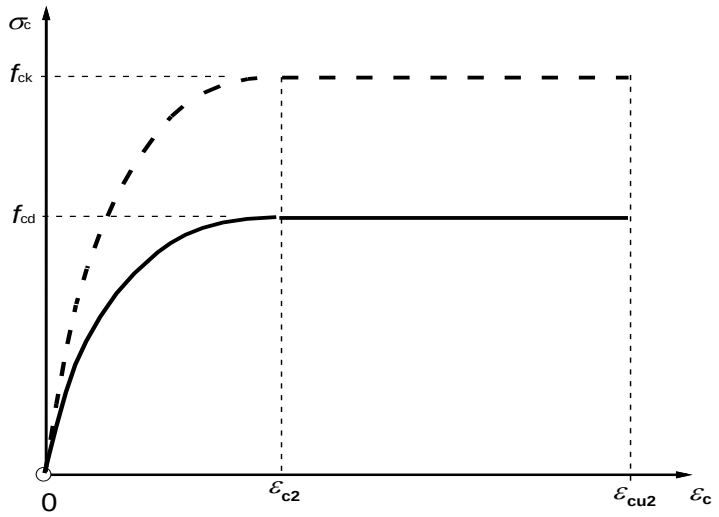


Figura 1. Diagrama parábola-rectângulo para o betão comprimido segundo o EC2.

O EC2 parametriza o diagrama parábola-rectângulo através das expressões 2 e 3.

$$\sigma_c = f_{cd}\left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}}\right)^n\right] \qquad 0 \le \varepsilon_c \le \varepsilon_{c2} \tag{2}$$

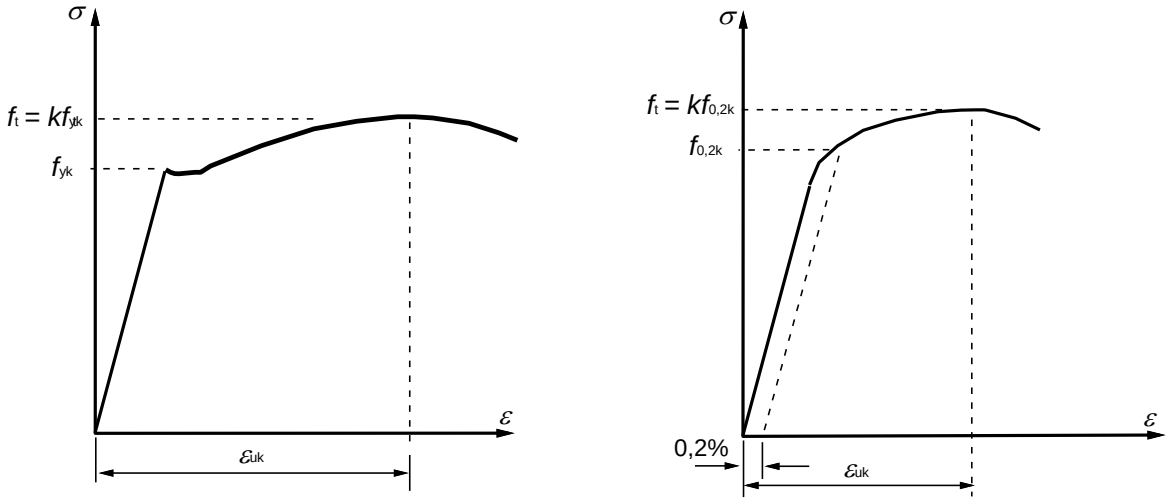
$$\sigma_c = f_{cd} \qquad \varepsilon_{c2} < \varepsilon_c \le \varepsilon_{cu2} \tag{3}$$

2.1.2. Aço

A classe de um aço é definida pela sua tensão de cedência, f_{yk} (no caso de um aço laminado a quente), ou pela sua tensão limite convencional de proporcionalidade a 0,2%, $f_{0,2k}$ (no

caso de aço endurecidos a frio), e pela sua ductilidade. Por exemplo, um aço da classe A500NR possui uma tensão de cedência de 500 MPa e ductilidade alta (NR). Os aços para betão armado possuem geralmente uma tensão de cedência de 400 ou 500MPa e os índices de ductilidade usados são geralmente: NR – ductilidade alta, NR SD – ductilidade especial e ER – ductilidade normal, sendo mais comum, o índice NR.

A tensão de cedência, f_{yk} (ou a tensão limite convencional de proporcionalidade a 0,2%, $f_{0,2k}$) e a resistência à tracção, f_{tk}, são definidas, respectivamente, como o valor característico da força de cedência e o valor característico da força máxima em tracção simples, divididos pela área nominal da secção transversal. A Figura 2 representa os diagramas tensões-extensões típicos de armaduras de betão armado.



a) Aço laminado a quente b) Aço endurecido a frio

Figura 2. Diagramas tensão-extensão do aço de armaduras para betão armado.

Segundo o EC2, o valor de cálculo da tensão de cedência à tracção do aço das armaduras de betão armado (f_{yd}) a usar é definido pela Expressão 4.

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} \tag{4}$$

em que:

γ_s coeficiente parcial de segurança relativo ao aço para betão armado (para os estados limites últimos, o valor imposto pelo EC2 é de 1,15).

As relações tensões-extensões de cálculo, no aço, a considerar na determinação dos esforços resistentes para verificação do E.L.U., podem ser traduzidas segundo duas hipóteses distintas (Figura 3):

a) consideração de um ramo superior inclinado com uma extensão limite de ε_{ud} e uma tensão máxima de kf_{yk}/γ_s para ε_{uk}, em que $k = (f_t/f_y)k$;

b) consideração de um ramo superior horizontal sem necessidade de verificação do limite da extensão.

No presente trabalho, optou-se, em todo o código computacional, pelo diagrama descrito em b).

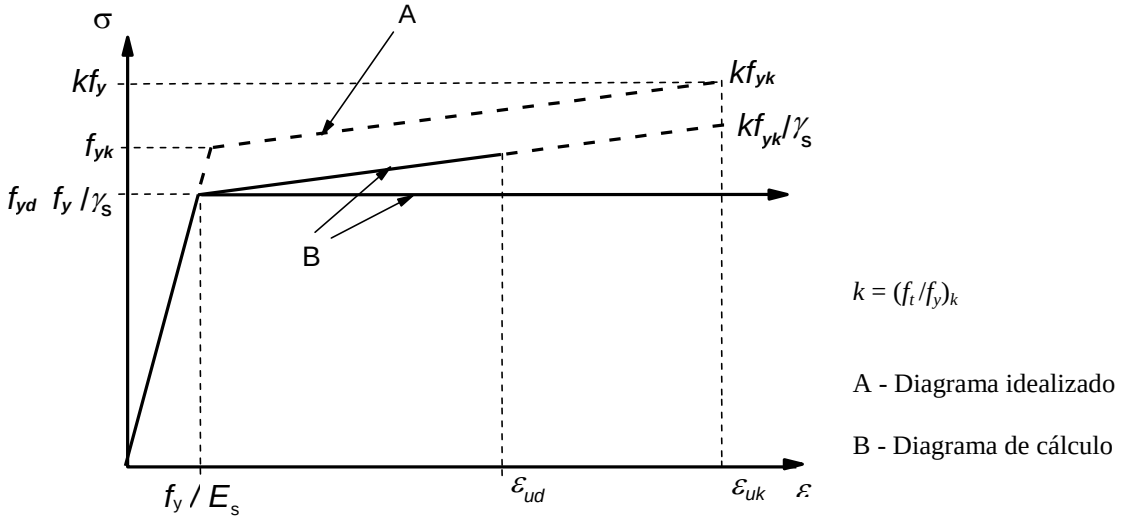


Figura 3. Diagramas bilineares tensões-extensões, idealizado e de cálculo, do aço para armaduras de betão armado (traccionado ou comprimido).

O diagrama bilinear de cálculo usado é definido através das expressões 5 e 6.

$$\sigma_s = \frac{f_{yd}}{E_s}\varepsilon_s \qquad se\ \ 0 \le \varepsilon_s \le f_{yd}/E_s \tag{5}$$

$$\sigma_s = f_{yd} \qquad se\ \ f_{yd}/E_s < \varepsilon_s \tag{6}$$

em que:

E_s módulo de elasticidade do aço (pode-se admitir igual a 200 GPa)

2.2. Formulação Teórica

2.2.1. Noção de equilíbrio estático e de segurança

A noção de equilíbrio estático surge quando numa determinada secção de betão armado genérica, sujeita a um conjunto de esforços (no presente caso: momento flector e esforço axial), o valor das reacções iguala o valor dos esforços actuantes (esforços externos - N_{Ed}, $M_{y,Ed}$ e $M_{z,Ed}$). Em estado limite último, considera-se que as reacções na secção tomam o valor dos esforços resistentes (esforços internos - N_{Rd}, $M_{y,Rd}$ e $M_{z,Rd}$). Posto isto, podem escrever-se as seguintes expressões:

$$\begin{cases} \sum N = N_{Ed} + N_{Rd} = 0 \\ \sum M_y = M_{y,Ed} + M_{y,Rd} = 0 \\ \sum M_z = M_{z,Ed} + M_{z,Rd} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

A segurança é verificada quando uma determinada secção permite que as condições apresentadas em 7 sejam satisfeitas. Pelo contrário, a segurança não se verifica quando não é possível satisfazer essas condições, devido à geometria, quantidade de armaduras ou devido a ambos os casos.

2.2.2. Equações de equilíbrio

O dimensionamento e a verificação da segurança baseiam-se na resolução do sistema de equações de equilíbrio apresentado na Expressão 8. Este sistema impõe que seja satisfeito o equilíbrio estático em todos os domínios (N, M_y e M_z) para as condições de estado limite último.

$$\begin{cases} N_{Rd} = \sum F_c + \sum F_s \left(+ \sum F_p \right)^* \\ M_{y,Rd} = \sum F_{ci} z_{ci} + \sum F_{sj} z_{sj} \left(+ \sum F_{pk} z_{pk} \right)^* \\ M_{z,Rd} = \sum F_{ci} y_{ci} + \sum F_{sj} y_{sj} \left(+ \sum F_{pk} y_{pk} \right)^* \end{cases} \quad (8)$$

*parcelas do sistema relativas ao pré-esforço, não aplicável neste caso de estudo

em que:

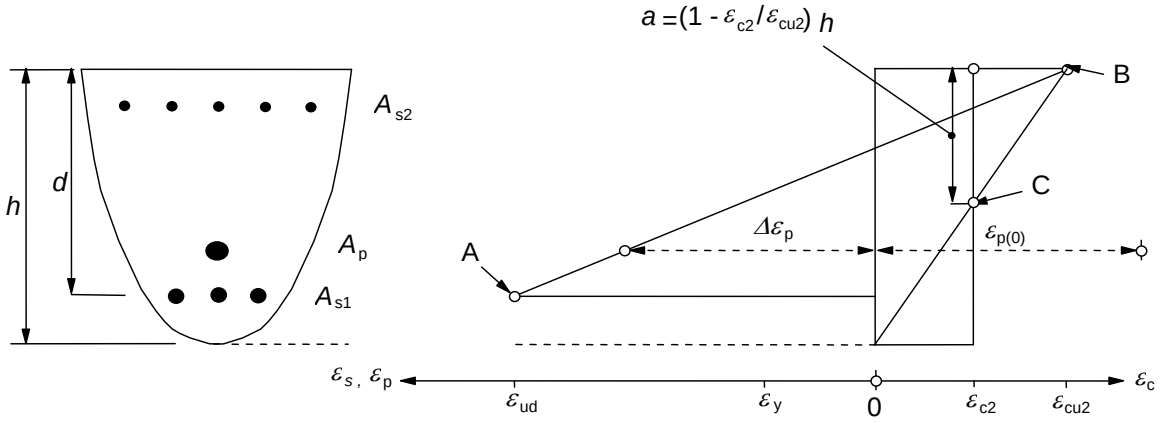
F_c força de compressão resultante no betão

F_s	força resultante nas armaduras
F_p	força resultante derivada do pré-esforço
i	índice relativo ao número de elementos de betão considerados (caso exista uma discretização)
j	índice relativo aos varões da secção
k	índice relativo às armaduras de pré-esforço da secção
y_c, y_s, y_p	excentricidade de um ponto ao c.g. da secção, medida no eixo y
z_c, z_s, z_p	excentricidade de um ponto ao c.g. da secção, medida no eixo z

O sistema de equações de equilíbrio consiste num sistema não linear, pelo que, a sua resolução passa pelo uso de um método iterativo. No presente trabalho, foi usado o método da secante, descrito em 2.2.4.

2.2.3. Distribuição de extensões em estado limite último

Os domínios de distribuição de extensões admissíveis em E.L.U. estão representados na Figura 4. Observando a figura, podem definir-se três domínios de deformação distintos, directamente relacionados com a profundidade do eixo neutro.



A - limite para a extensão de tracção do aço para betão armado

B - limite para a extensão de compressão do betão

C - limite para a extensão de compressão simples do betão

Figura 4. Distribuição de extensões admissíveis em estado limite último (NP EN 1992-1-1, 2010).

Descrevem-se de seguida os três domínios de deformação com base em Montoya *et al.* (2000).

Domínio 1

Ocorre quando a profundidade do e.n. varia entre $x = -\infty$ (tracção simples) e $x = \frac{\varepsilon_{cu2}}{\varepsilon_{cu2}+\varepsilon_{ud}} d$ (secção parcialmente comprimida). Neste domínio, a linha de extensão move-se em torno do ponto A, até ao valor da extensão na fibra mais comprimida de betão atingir um valor de $\varepsilon_c = \varepsilon_{cu2}$ (ponto B).

Domínio 2

Ocorre quando a profundidade do e.n. varia entre $x = \frac{\varepsilon_{cu2}}{\varepsilon_{cu2}+\varepsilon_{ud}} d$ e $x = h$ (secção totalmente comprimida). Neste caso, a linha de extensão move-se em torno de B, até à totalidade da secção ficar comprimida ($\varepsilon_c = \varepsilon_{cu2}$ na fibra mais comprimida e $\varepsilon_c = 0$ na fibra menos comprimida).

Domínio 3

Ocorre quando a profundidade do e.n. varia entre $x = h$ e $x = +\infty$ (compressão simples). Neste domínio, a linha de extensão move-se em torno no ponto C até à extensão de todas as fibras da secção assumirem o valor de $\varepsilon_c = \varepsilon_{c2}$.

Com base nos parâmetros expostos para cada domínio, é possível determinar a extensão em cada fibra da secção à profundidade z $(0 < z < h)$, dada uma determinada profundidade do e.n., x $(-\infty < x < +\infty)$. Posto isto, deduziram-se as três equações representativas dos diagramas de extensão, $\varepsilon(z)$, para os respectivos domínios (Tabela 2).

Tabela 2. Equações usadas na determinação da extensão em cada fibra da secção.

Domínio	Extensão em cada fibra	Intervalo de variação do e.n.
1	$\varepsilon_1(z) = -\varepsilon_{ud}\left(\frac{z-x}{d-x}\right)$	$-\infty < x < \frac{\varepsilon_{cu2}}{\varepsilon_{cu2}+\varepsilon_{ud}} d$
2	$\varepsilon_2(z) = -\frac{\varepsilon_{cu2}}{x} z + \varepsilon_{cu2}$	$\frac{\varepsilon_{cu2}}{\varepsilon_{cu2}+\varepsilon_{ud}} d < x < h$
3	$\varepsilon_3(z) = \varepsilon_{c2}\left(1 + \frac{a-z}{x-a}\right)$	$h < x < +\infty$

Nota: o parâmetro *a* está definido na Figura 4.

2.2.4. Método da Secante

O método da secante consiste em dadas duas iterações anteriores, $\left(x_{k-1}, f(x_{k-1})\right)$ e $\left(x_k, f(x_k)\right)$, obter a iteração seguinte x_{k+1} com a intersecção da secante que passa pelos referidos pontos, com o eixo dos xx (MNE, 2007).

A fórmula de recorrência que permite obter x_{k+1} pode escrever-se da seguinte forma:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1}), \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{9}$$

Como verificado pela relação de recorrência, o método da secante requer dois valores iniciais x_0 e x_1, que devem preferencialmente ser escolhidos próximos da raiz para permitir uma convergência mais eficaz.

Dados x_{n-1} e x_n, constrói-se a recta que passa pelos pontos (x_{n-1} , $f(x_{n-1})$ e (x_n , $f(x_n)$), como ilustrado na Figura 5. O processo passa pelo traçado sucessivo de secantes até se atingir a convergência pretendida. Este método permite geralmente uma convergência bastante rápida.

Na Figura 5 representa-se um exemplo de um função genérica $f(x)$, para a qual se determinaram as duas primeiras secantes.

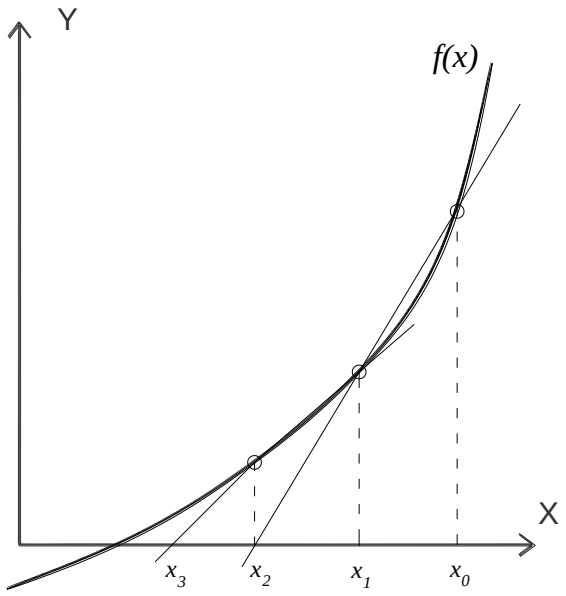


Figura 5. Exemplo da determinação da raiz de uma função $f(x)$ através do método da secante, com representação das duas primeiras secantes obtidas.

3. VERIFICAÇÃO DA SEGURANÇA

Neste capítulo são apresentados os processos computacionais implementados para a verificação da segurança de problemas de flexão composta desviada (método comum a todas as secções) e esforço transverso (secções rectangulares, circulares, T, C e L).

3.1. Flexão Composta Desviada

3.1.1. Método de verificação da segurança

A capacidade resistente de uma secção de betão armado, relativamente à flexão desviada, é definida pelos seus esforços resistentes $M_{y,Rd}$, $M_{z,Rd}$ e N_{Rd}. Estes esforços são dependentes entre si, isto é, no caso de uma determinada secção sujeita a um esforço axial N_{Ed} e considerando $N_{Rd} = N_{Ed,}$ os esforços resistentes $M_{y,Rd}$ e $M_{z,Rd}$ irão depender desse valor, daí a não linearidade do sistema de equações de equilíbrio e a necessidade de recorrer a métodos numéricos de convergência para a sua resolução. Assim sendo, existe uma infinidade de conjuntos de valores $M_{y,Rd}$, $M_{z,Rd}$ e N_{Rd} que definem a segurança de uma secção de betão armado. Estes conjuntos de valores permitem representar uma nuvem de pontos inseridos num referencial cartesiano tridimensional xyz, gerando uma superfície designada por diagrama de interacção tridimensional de flexão desviada. A Figura 6 representa um exemplo genérico de um diagrama de interacção para valores de momentos M_y e M_z positivos e um exemplo de secções transversais para três situações distintas a), b), e c).

A superfície estabelece os limites de segurança de uma secção com parâmetros geométricos, materiais e de armadura definidos. Posto isto, pode admitir-se que uma secção está em segurança, no caso de um ponto de coordenadas $x = M_{z,Ed}$, $y = M_{y,Ed}$ e $z = N_{Ed}$, representado no referencial cartesiano tridimensional, se encontrar situado no espaço interior da superfície ou no caso de coincidir com esta (situação limite).

Posto isto, a problemática da verificação da segurança consiste na determinação da superfície de interacção e representação do ponto definido pelos esforços actuantes.

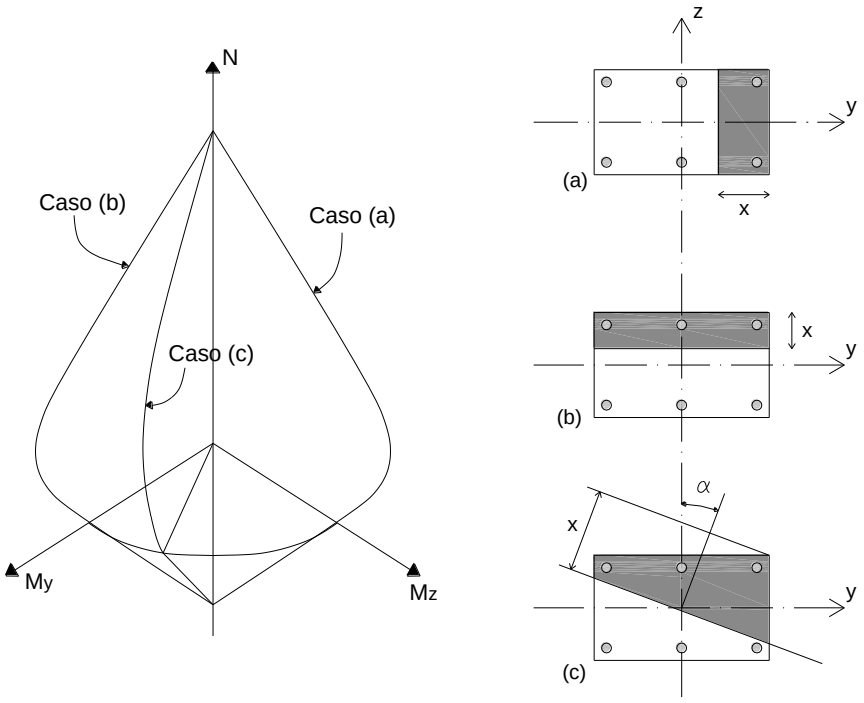


Figura 6. Diagrama de interacção tridimensional de flexão desviada genérico, com exemplo de uma secção transversal em três situações, baseado em Lejano (2007).

3.1.2. Diagrama de interacção tridimensional de flexão desviada

Cada posição do eixo neutro (profundidade e inclinação) confere à secção determinados valores de esforços resistentes $M_{y,Rd}$, $M_{z,Rd}$ e N_{Rd}, calculados através Expressão 8, definindo um dos pontos da superfície. Posto isto, a superfícies pode ser obtida impondo valores de e.n., determinando para cada um, o conjunto de esforços resistentes. A precisão do traçado da superfície depende da quantidade de eixos neutros considerados. Assim, quanto maior for quantidade de eixos considerados, maior será o número de pontos obtidos, logo, maior será a precisão do traçado da superfície, no entanto mais demorado será o processo.

A partir da superfície de segurança, pode obter-se um infinito número de curvas (M_y-M_z), definidas no plano horizontal xy, que definem a segurança para um determinado valor de N_{Rd} (Figura 7). Neste caso, se o ponto representativo dos esforços actuantes está posicionado dentro ou sobre a curva, a segurança está verificada. Caso contrário não se verifica a segurança. Este método é mais eficiente visto ser necessária uma quantidade mais reduzida de pontos para efectuar a verificação da segurança da secção. Assim sendo, este foi o processo adoptado no programa.

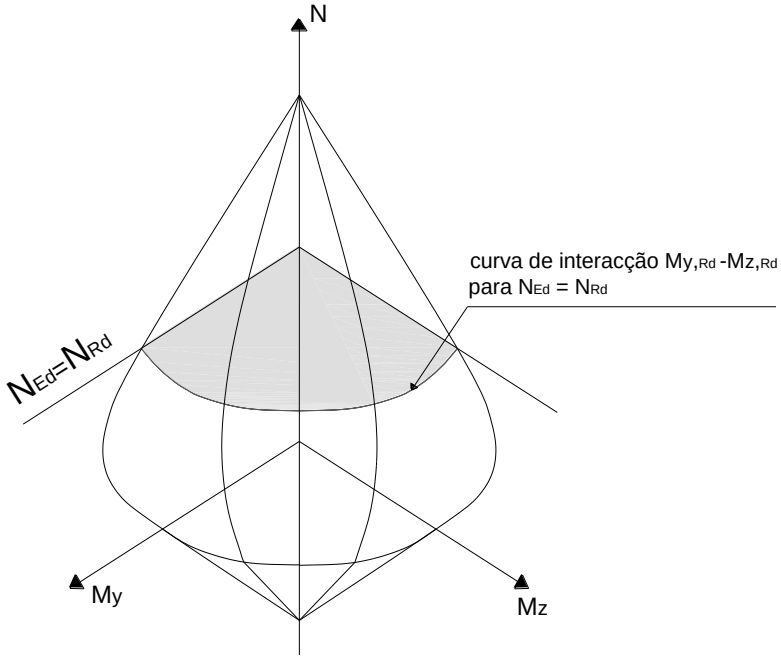


Figura 7. Diagrama de interacção tridimensional de flexão desviada com esquematização de uma das curvas de interacção M_y-M_z possíveis de obter.

3.1.3. Determinação das curvas de interacção M_y - M_z

Para cada inclinação do e.n., existe uma determinada profundidade, x, para a qual se verifica a condição $N_{Rd} = N_{Ed}$. Dada a profundidade e inclinação do e.n., são determinados os valores dos momentos resistentes $M_{y,Rd}$ e $M_{z,Rd}$, formando um dos pontos ($x = M_{z,Rd}$ e $y = M_{z,Rd}$) que servirá ao traçado da curva. Repetindo o processo para inclinações do e.n. entre 0 e 360 graus, com incremento de n graus, obtém-se um número de pontos = $^{360}/_{n} + 1$ que permitem o traçado da curva. Um incremento de 15º é geralmente suficiente para se obter uma boa definição do traçado (25 pontos).

3.1.4. Determinação dos esforços resistentes – Método das Fibras

No caso de secções de geometria simples em flexão simples/composta, o cálculo dos esforços resistentes é fácil, porém, na óptica de secções genéricas em flexão desviada, torna-se mais complexo.

O método adoptado baseia-se na modelação das secções pelo método das fibras (Fábio F.Taucer *et al.*, 1991). Este consiste na discretização da secção de betão através da sua divisão em áreas elementares (dA_i), formando uma malha de fibras, cujo refinamento é

definido pelo utilizador do programa. Uma fibra é definida pelo seu eixo, o qual corresponde, no estudo de uma secção transversal, a um ponto, gerado pela intersecção do eixo com a secção transversal. Cada ponto possui propriedades mecânicas e geométricas próprias: a posição em relação ao centro de gravidade da secção ($u_{y,i}$ e $u_{z,i}$), a tensão ($\sigma_{c,i}$), extensão ($\varepsilon_{c,i}$) e a força de compressão elementar ($dF_{c,i}$).

As armaduras representam-se pelas suas fibras médias, definidas da mesma forma pelos parâmetros: área ($A_{s,j}$), posição em relação ao centro de gravidade da secção ($u_{y,j}$ e $u_{z,j}$), tensão ($\sigma_{s,j}$), extensão ($\varepsilon_{s,j}$) e força axial de tracção ou compressão ($F_{s,j}$).

A Figura 8 ilustra um exemplo da discretização de uma secção rectangular, com representação dos parâmetros caracterizadores das fibras e armaduras da secção. É importante referir que a malha adoptada no exemplo é bastante "larga" (10x10 elementos), de forma permitir uma boa exemplificação. Para a obtenção de resultados mais satisfatórios, a definição da malha deve ser mais refinada, geralmente na ordem dos 50x50 elementos.

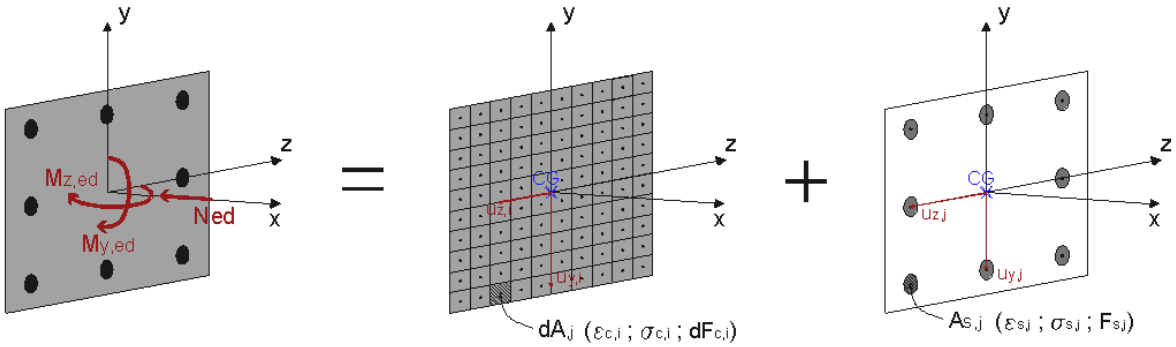


Figura 8. Exemplo da discretização de uma secção rectangular e parâmetros necessários a execução do método, baseado em Lejano (2007).

De seguida é apresentado o processo implementado na determinação dos esforços resistentes de uma secção pelo método das fibras e respectivas funções computacionais implementadas.

1º - Divisão da secção numa malha de pontos e determinação do centro de gravidade

No processo implementado, uma secção transversal de B.A. é definida pelos seus vértices. Dada a geometria da secção, o programa gera dois vectores (V_x e V_y) de dimensão n, com

n = número de vértices da secção, onde são guardadas as posições x e y dos vértices no referencial representado na Figura 9.

Uma vez definidos os vértices, a secção é inserida no menor rectângulo possível, onde é gerada uma malha de pontos, espaçados com base na precisão definida pelo utilizador. Uma função lógica verifica se cada ponto pertence ou não à secção, definindo assim, uma malha de fibras, de área elementar dA_i e posição $P_i(x, y)$, representativa da secção (Figura 9).

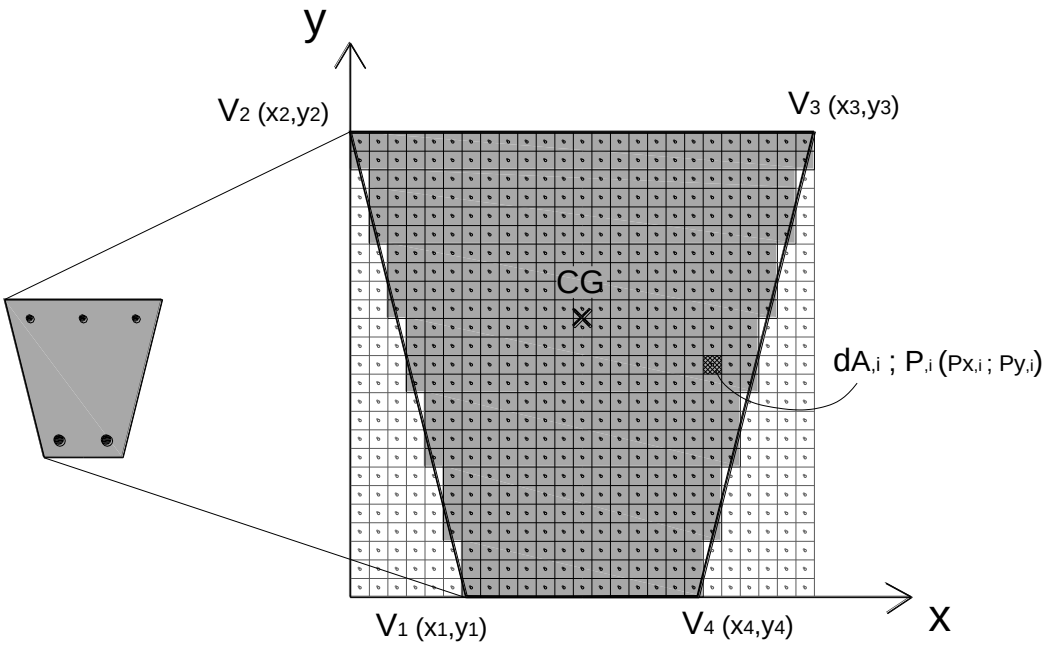


Figura 9. Definição e discretização computacional de uma secção de betão armado.

A posição do centro de gravidade da secção (CGx e CGy) é determinada através da Expressão 10.

$$CGx = \frac{\sum(dA_i \times Px_i)}{\sum dA_i} \quad \text{e} \quad CGy = \frac{\sum(dA_i \times Py_i)}{\sum dA_i} \tag{10}$$

2º - Determinação das fibras comprimidas

As fibras de betão encontram-se comprimidas quando se situam acima do e.n., definindo, no seu conjunto, a parte comprimida da secção (Figura 10). A determinação dessas fibras é feita através de uma função lógica que permite determinar se um ponto $P_i(x, y)$, está situado acima ou abaixo de uma linha (e.n.) definida por dois pontos (Pl_1 e Pl_2). Cada

fibra é analisada, e no caso da condição se verificar, a sua posição no referencial xy é guardada em dois vectores, PCx e PCy.

A Figura 10 ilustra a forma como o programa define a zona comprimida da secção.

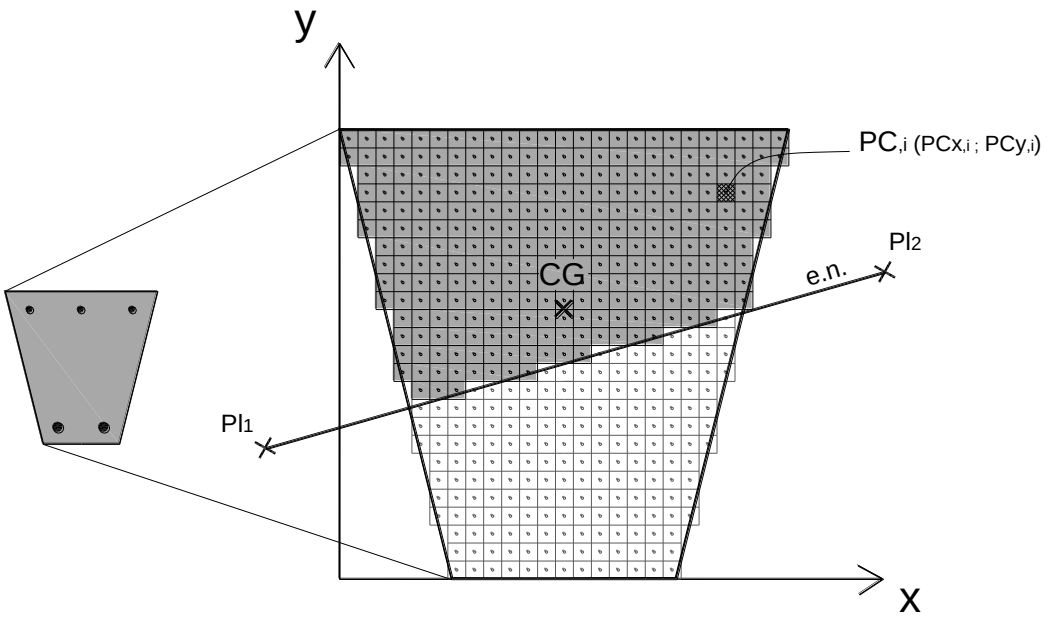


Figura 10. Determinação das fibras comprimidas.

3º - Distância na perpendicular entre cada fibra comprimida e o e.n.

De forma a possibilitar o cálculo da extensão nas fibras comprimidas, torna-se necessário determinar a distância na perpendicular entre cada fibra e o e.n. (Figura 11).

Dada uma determinada fibra comprimida $PC_i(x, y)$ e uma recta (e.n.) definida por dois pontos $Pl_1(x_1, y_1)$ e $Pl_2(x_2, y_2)$, a distância d_i de $PC_i(x_i, y_i)$ a $\overline{Pl_1\, Pl_2}$ na perpendicular, é dada pela Expressão 11.

$$d_i = \frac{(y_1 - y_2)x_i + (x_2 - x_1)y_i + (x_1 y_2 - x_2 y_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \tag{11}$$

4º - Determinação da extensão nos pontos comprimidos de betão

Dada uma determinada posição do eixo neutro, é possível obter o diagrama de extensões na secção através das expressões apresentadas na Tabela 2. Usando os valores das distâncias das fibras comprimidas ao e.n. (d_i), é possível obter uma lista de dimensão n,

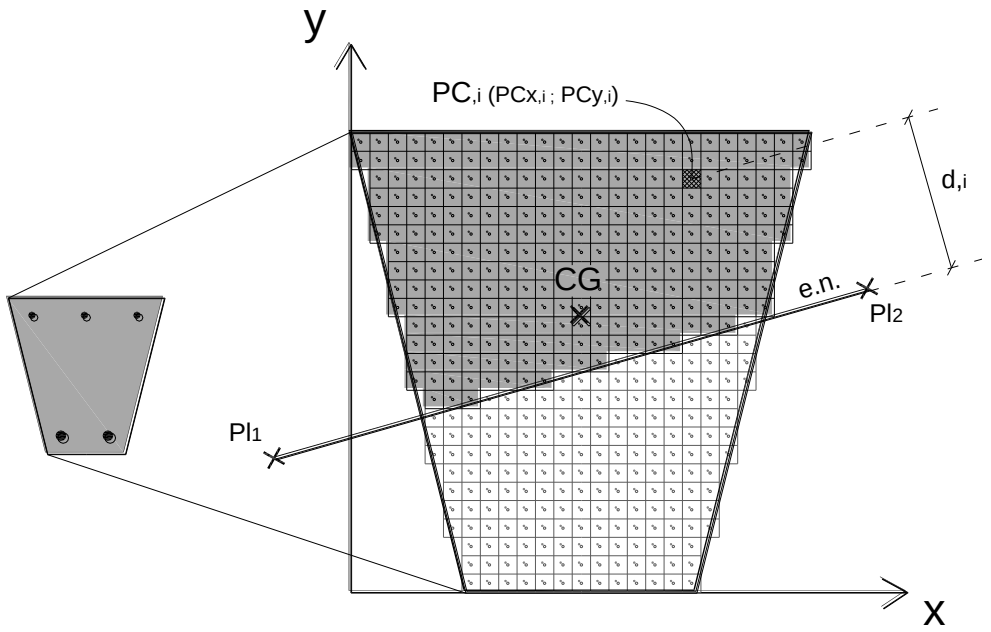


Figura 11. Distância na perpendicular entre os pontos comprimidos de betão e o e.n..

com n = número de pontos comprimidos, onde é guardada a extensão em cada uma dessas fibras ($\varepsilon_{c,i}$). O valor de z a considerar nas expressões da Tabela 2 consiste na diferença entre a profundidade do e.n. e a distância das fibras comprimidas ao eixo, obtendo-se para cada fibra: $z_i = x - d_i$.

A Figura 12 representa um exemplo de um diagrama de extensões, usando a lei de variação da extensão do 2º domínio de deformação (Tabela 2).

5º - Determinação da tensão nas fibras comprimidas

Conhecida a extensão em cada fibra comprida ($\varepsilon_{c,i}$), é possível obter o diagrama de tensões parábola-rectângulo definido em 2.1.1 e exemplificado na Figura 13. O valor da tensão em cada fibra comprimida ($\sigma_{c,i}$) determina-se através das Expressões 12 e 13, fornecidas pelo EC2, que definem a lei constitutiva de comportamento do betão.

$$\sigma_{c,i} = f_{cd}\left[1-\left(1-\frac{\varepsilon_{c,i}}{\varepsilon_{c2}}\right)^{n}\right] \qquad \text{para: } 0 \le \varepsilon_{c,i} \le \varepsilon_{c2} \qquad (12)$$

$$\sigma_{c,i} = f_{cd} \qquad \text{para: } \varepsilon_{c2} \le \varepsilon_{c,i} \le \varepsilon_{cu2} \qquad (13)$$

em que:

ε_{c2} extensão ao ser atingida a tensão máxima f_{cd}, de acordo com a Tabela 1.

ε_{cu2} extensão última, de acordo com a Tabela 1.

n expoente, de acordo com a Tabela1.

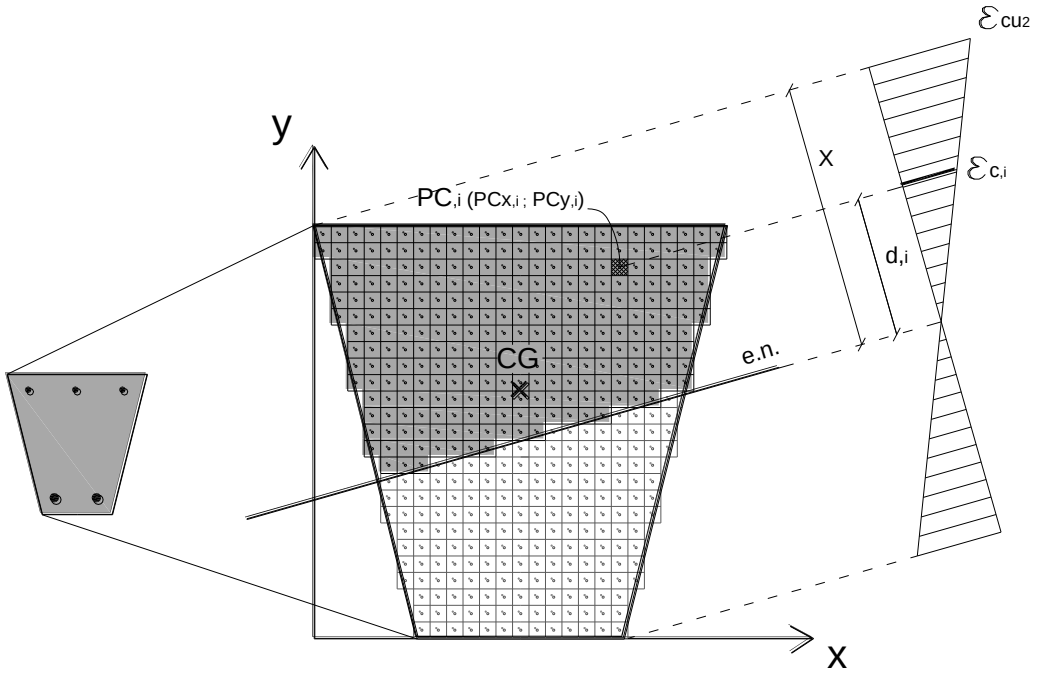


Figura 12. Exemplo de um diagrama de extensões da secção genérica.

6º - Força de compressão resultante nas fibras comprimidas

A força de compressão resultante, em cada fibra comprimida ($dF_{c,i}$), resulta da multiplicação entre a tensão nesse ponto ($\sigma_{c,i}$) e a área elementar correspondente (dA_i), como indica a Expressão 14.

$$dF_{c,i} = \sigma_{c,i}\, dA_i \tag{14}$$

7º - Determinação da distância na perpendicular entre cada varão da secção e o e.n.

O processo é idêntico ao descrito no 3º passo, usando, da mesma forma, a Expressão 11. Segundo esta, um ponto situado acima do e.n. (armadura em compressão) assume um valor de d_j positivo, enquanto um ponto situado abaixo do e.n. (armadura em tracção) assume um valor de d_j negativo (Figura 14).

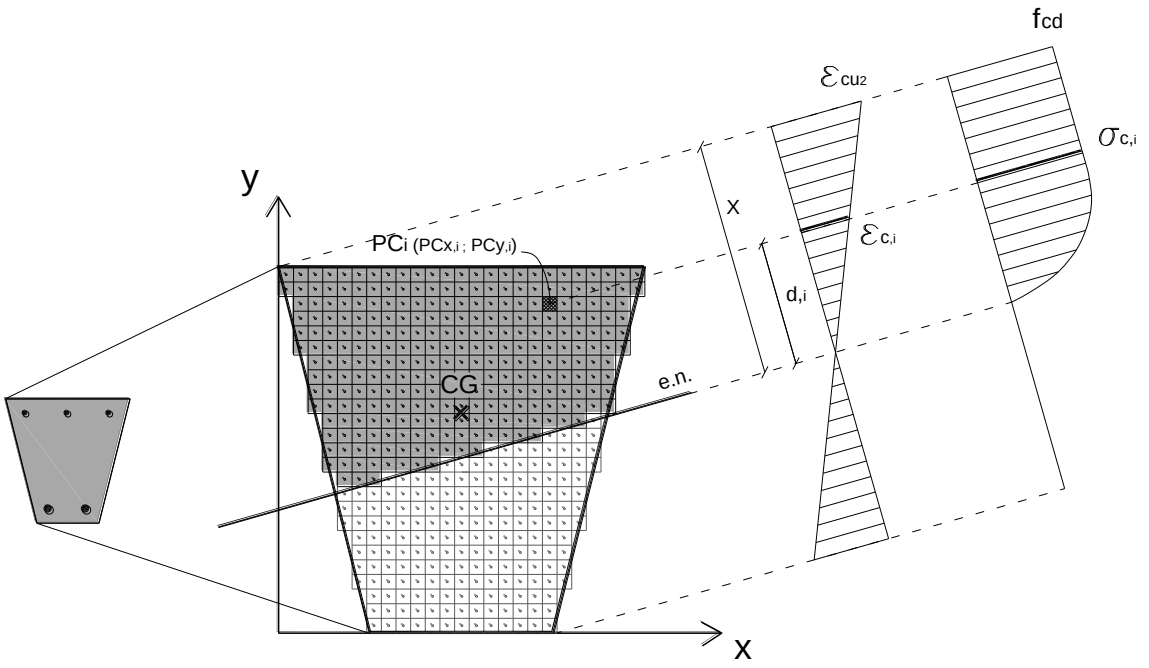


Figura 13. Exemplo de um diagrama de tensões no betão da secção genérica.

8º - Determinação da extensão dos varões

A determinação da extensão em cada varão ($\varepsilon_{s,j}$) obtém-se partindo do descrito no 4º passo, no caso das fibras comprimidas, usando, da mesma forma, as leis de variação de extensão, apresentadas na Tabela 2. O valor de z a considerar, consiste na diferença entre a profundidade do e.n. e a distância dos varões ao eixo, obtendo-se para cada varão, a relação $z_j = x - d_j$ (Figura 15).

9º - Determinação da tensão nos varões

Dada a extensão em cada varão ($\varepsilon_{s,j}$), é possível obter o diagrama de tensões bilinear definido em 2.1.2 e exemplificado na Figura 15. O valor da tensão em cada varão ($\sigma_{s,j}$) determina-se através das Expressões 15 e 16, que definem a lei constitutiva de comportamento adoptada, para o aço de aço para armaduras de betão armado.

$$\sigma_{s,j} = \varepsilon_{s,j} E_{cm} \qquad \text{para: } 0 \leq \varepsilon_{s,j} \leq f_{yd}/E_{cm} \qquad (15)$$

$$\sigma_{s,j} = f_{yd} \qquad \text{para: } f_{yd}/E_{cm} < \varepsilon_{s,j} \qquad (16)$$

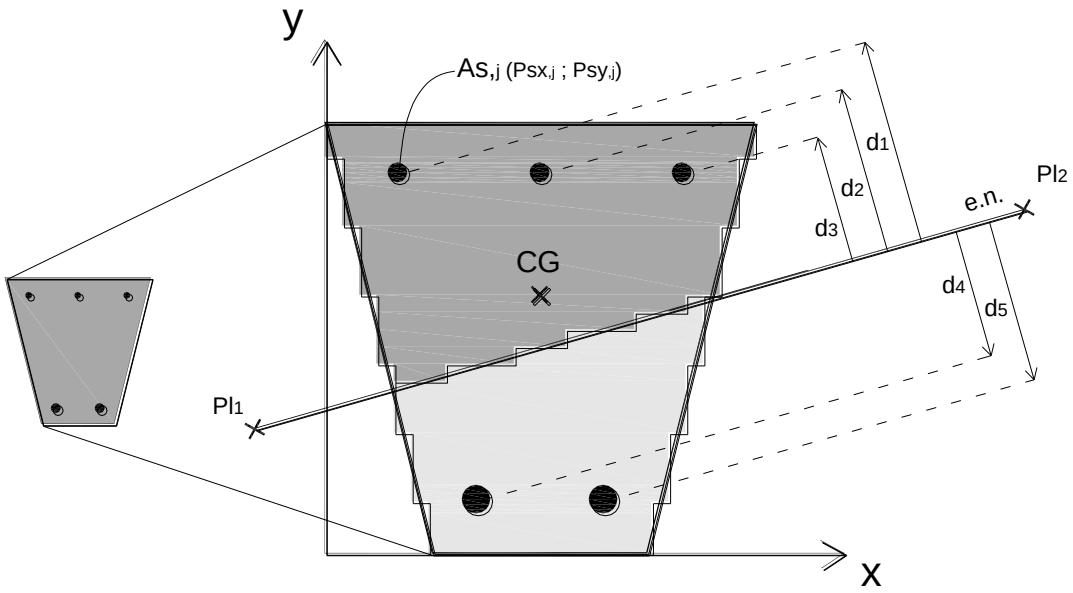


Figura 14. Distância na perpendicular entre as armaduras e o e.n…

10º - Determinação da força normal em cada varão

A força normal resultante em cada varão ($F_{s,j}$) resulta da multiplicação entre a tensão nesse varão ($\sigma_{s,j}$) e a sua área ($dA_{s,j}$), como indica a seguinte expressão:

$$F_{s,j} = \sigma_{s,j}\, A_{s,j} \tag{17}$$

11º - Determinação do esforço axial resistente da secção, N_{Rd}

O esforço axial resistente da secção consiste no somatório do esforço axial resultante em cada fibra comprimida e do esforço axial resultante em cada varão (Expressão18).

$$N_{Rd} = \sum dF_{c,i} + \sum F_{s,j} \tag{18}$$

12º - Novo referencial *yz* e nova posição das fibras e armaduras

Dada a posição de cada fibra comprimida ($PCx_i\,, PCy_i$) e de cada varão ($PSx_j\,, PSy_j$), determina-se a posição relativamente ao centro de gravidade (CGx,CGy), de cada um desses, pontos num novo referencial yz com origem no c.g., através da Expressão 19 e 20.

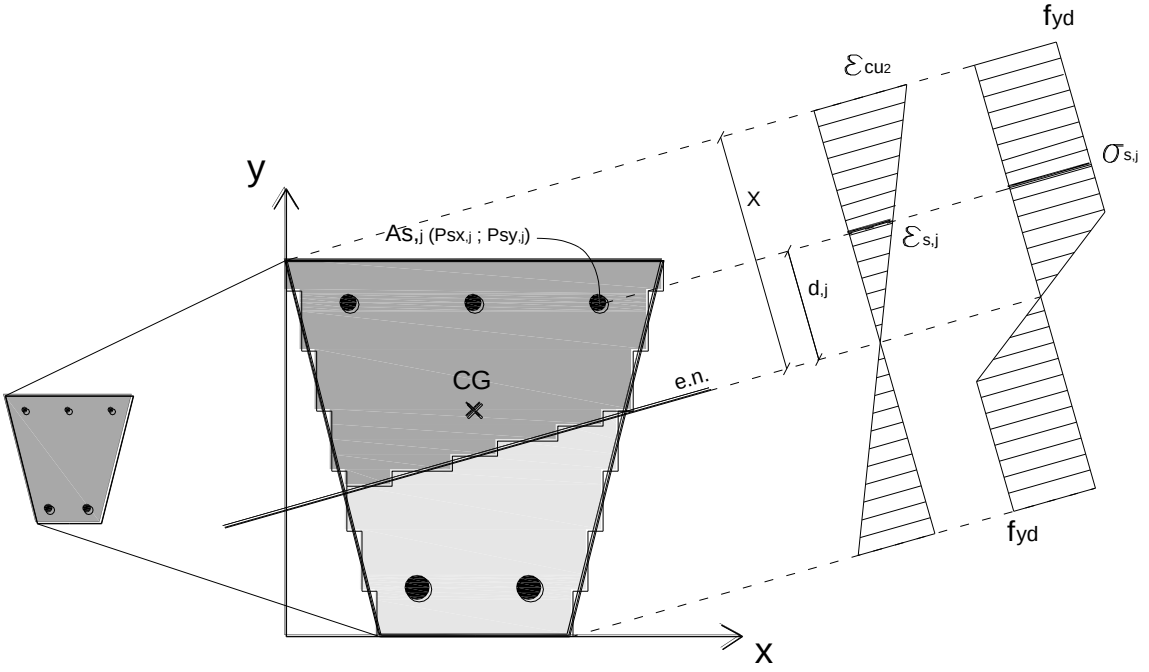


Figura 15. Exemplo de um diagrama de extensões e tensões no aço.

$$PCGy_i = PCx_i - CGx \qquad \text{e} \qquad PCGz_i = PCy_i - CGy \tag{19}$$

$$PsCGy_j = PSx_j - CGx \qquad \text{e} \qquad PsCGy_j = PSy_j - CGy \tag{20}$$

Os valores de $PCGy_i$ e $PsCGy_j$ são positivos se o ponto se encontrar à direita de CGx, caso contrário, serão negativos. O mesmo acontece na direcção z, onde os valores de $PCGz_i$ e $PsCGy_j$ são positivos, se o ponto se encontrar acima de CGy, e negativos, caso contrário. A Figura 16 representa o novo referencial estabelecido.

13º - Momentos resistentes conferidos pelo betão, $Mc_{y,Rd}$ e $Mc_{z,Rd}$

Os momentos resistentes $Mc_{y,Rd}$ e $Mc_{z,Rd}$ são calculados em relação ao centro de gravidade da secção, pelo que, ambos dependem da distância de cada fibra comprimida ao c.g. ($PCGy_i$ e $PCGz_i$) e da força de compressão nelas resultante ($dF_{c,i}$). Assim, determinam-se os momentos resistentes segundo as Expressões 21 e 22.

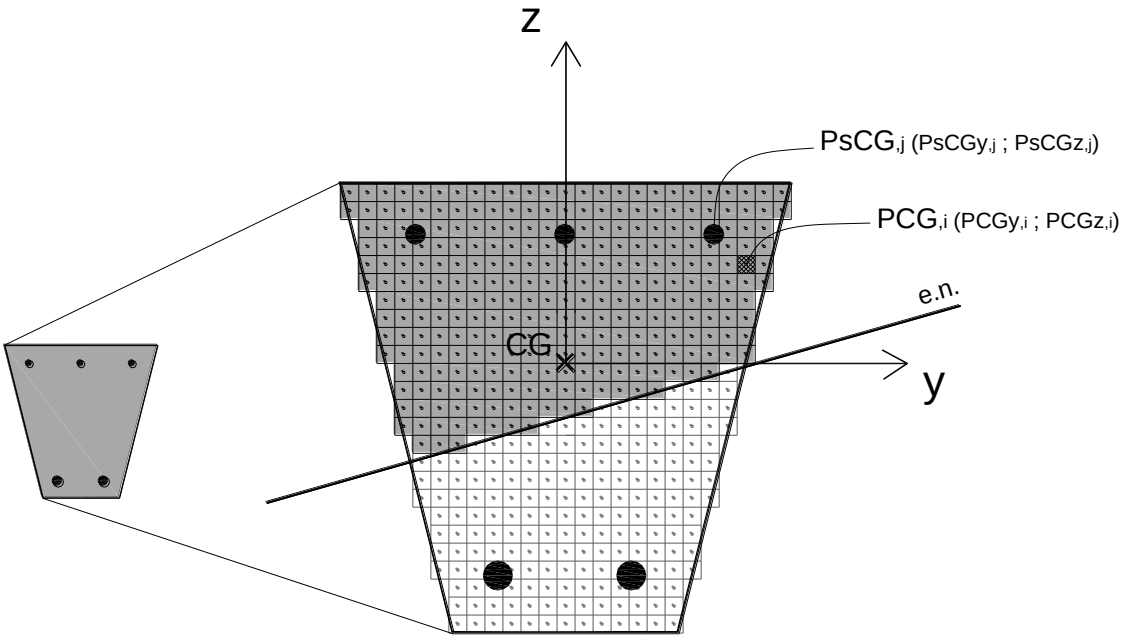


Figura 16. Mudança de referencial e novas posições dos pontos discretizadores.

$$Mc_{y,Rd} = \sum PCGz_i \, dFc_i \tag{21}$$

$$Mc_{z,Rd} = \sum PCGy_i \, dFc_i \tag{22}$$

14º - Momentos resistentes conferidos pelos varões, $Ms_{y,Rd}$ e $Ms_{z,Rd}$

Tal como acontece no 13º passo, os momentos resistentes $M_{sy,Rd}$ e $M_{sz,Rd}$ são calculados com base na distância de cada varão ao c.g. ($PsCGy_j$e $PsCGz_j$) e na força axial resultante (Fs_j) através das Expressões 23 e 24.

$$Ms_{y,Rd} = \sum PsCGz_j \, Fs_j \tag{23}$$

$$Ms_{z,Rd} = \sum PsCGy_j \, Fs_j \tag{24}$$

15º - Momentos resistentes totais, $M_{y,Rd}$ e $M_{z,Rd}$

Finalmente, os momentos resistentes da secção, $M_{y,Rd}$ e $M_{z,Rd}$, resultam da soma entre a contribuição do betão e do aço, resultando nas expressões 25 e 26.

$$M_{y,Rd} = Mc_{y,Rd} + Ms_{y,Rd} \quad (25)$$

$$M_{z,Rd} = Mc_{z,Rd} + Ms_{z,Rd} \quad (26)$$

3.2. Esforço Transverso

O processo de verificação da segurança adoptado, em relação ao esforço transverso, baseia-se no processo de dimensionamento, exposto na secção 4.3. Dada uma determinada secção, sujeita a esforços de corte em ambas as direcções, dimensiona-se a armadura transversal, necessária à garantia da segurança da secção, e compara-se com a existente. Se a armadura existente for superior ao valor dimensionado, verifica-se a segurança.

4. DIMENSIONAMENTO

O dimensionamento de uma secção de betão armado é mais complexo comparativamente à verificação da segurança. Baseia-se essencialmente na determinação da quantidade de armadura necessária de forma a verificar-se a segurança da secção, com aproveitamento óptimo, com base na Expressão 8.

As secções disponíveis para dimensionamento são secções rectangulares, em T e circulares, as mais comuns em edifícios correntes. Apesar de mais moroso, qualquer outro tipo de secção pode ser dimensionado através de algumas tentativas de verificação da segurança, atribuindo valores de armaduras manualmente.

4.1. Flexão Simples

4.1.1. Secção rectangular

A resolução de problemas de flexão simples é feita através da utilização do diagrama rectangular de tensões. Este torna-se equivalente ao diagrama parábola-rectângulo definido em 2.1.1., através dos parâmetros λ e η, definidos pelas expressões 27, 28, 29 e 30. A Figura 17 representa os diagramas de extensões e tensões, e as forças internas geradas na secção em estado limite último, quando sujeita a um momento flector M_{Ed}.

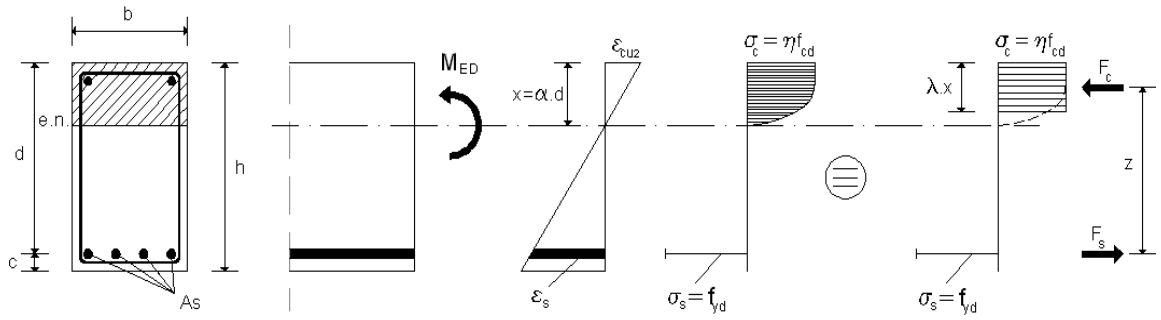


Figura 17. Secção rectangular sujeita à flexão simples, em estado limite último (Walther e Miehlbradt, 1990).

$$\lambda = 0{,}8 \qquad \text{para: } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \qquad (27)$$

$$\lambda = 0{,}8 - (f_{ck} - 50)/400 \qquad \text{para: } 50 \leq f_{ck} \leq 90 \text{ MPa} \qquad (28)$$

$$\eta = 1{,}0 \qquad \text{para: } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \tag{29}$$

$$\eta = 1{,}0 - (f_{ck} - 50)/200 \qquad \text{para: } 50 \leq f_{ck} \leq 90 \text{ MPa} \tag{30}$$

A determinação do valor da área de aço, As, passa pela resolução do sistema de equações apresentado na Expressão 31 baseado na Expressão 8.

$$\begin{cases} F_S = F_C \\ M_{ED} = M_{RD} = F_c \cdot z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_S \cdot f_{yd} = \lambda x \cdot b \cdot \eta f_{cd} \\ M_{RD} = \lambda x \cdot b \cdot \eta f_{cd} \cdot \left(d - {}^{\lambda}/_{2} \cdot x\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_S = \dfrac{\lambda x \cdot b \cdot \eta f_{cd}}{f_{yd}} \\ x \text{ - Resolução da equação anterior} \end{cases} \tag{31}$$

A profundidade do e.n. deve ser limitada, de forma a evitar a rotura frágil da secção, isto é, a rotura por compressão do betão, não aproveitando as propriedades plásticas do aço. A profundidade do e.n. pode ser controlada de duas formas. Uma baseia-se na definição do valor máximo de α (Expressão 32), que resulta da relação entre a profundidade do e.n., x, e a altura efectiva da secção, d. A segunda baseia-se na definição do valor máximo do momento reduzido, μ_{max}, que depende do momento actuante, da geometria e da classe do betão da secção (Expressão 33).

$$\alpha = \frac{x}{d} < \alpha_{max} \tag{32}$$

$$\mu = \frac{M_{Ed}}{bd^2 f_{cd}} < \mu_{max} \tag{33}$$

No caso da profundidade do eixo neutro ultrapassar o valor máximo estipulado, é possível adoptar duas soluções: a primeira consiste em alterar a geometria da secção e a segunda consiste na colocação de armadura de compressão.

O dimensionamento da armadura de compressão pode ser dividido em dois passos, representados na Figura 18. O primeiro consiste em determinar qual o momento resistente da secção, M_{Rd1}, admitindo $x = x_{max}$ ou $\mu = \mu_{max}$. Com este momento resistente, determina-se a área de aço inferior, As_1, pela Expressão 31. O segundo passo resume-se à determinação do valor de M_{Rd2}, resultante da diferença entre o momento actuante na secção, M_{Ed}, e M_{Rd1}. A partir de M_{Rd2}, determina-se a área de armadura suplementar

simétrica, As_2, partindo do pressuposto que esse momento provoca na secção, um binário composto por duas forças simétricas, Fs_2, separadas por uma braço de dimensão $h - 2c$ (Expressão 34).

$$M_{Rd2} = (h - 2c)F_{s2} \iff M_{Rd2} = (h - 2c)A_{s2}f_{yd} \iff A_{s2} = \frac{M_{Rd2}}{(d - 2c)f_{yd}} \qquad (34)$$

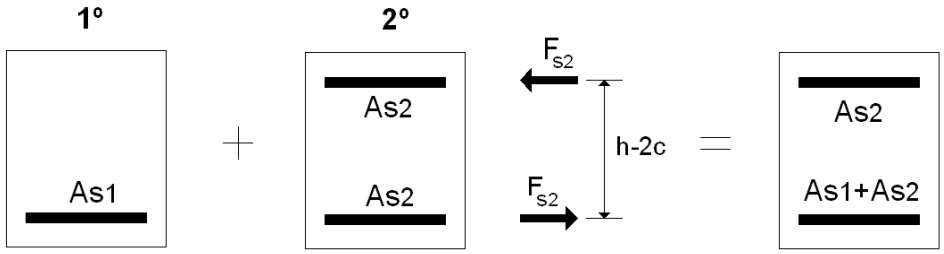


Figura 18. Determinação da armadura de compressão.

4.1.2. Secção em T

Na rotura, o eixo neutro de uma secção em T situa-se geralmente no banzo comprimido. Neste caso, a determinação da armadura longitudinal é feita à semelhança do método usado para secções rectangulares, descrito em 4.1.1, considerando a largura do banzo, b_f, para o valor b (Figura 17).

Contudo, podem existir casos em que o eixo neutro se encontra na alma da secção, obtendo-se, neste caso, os esforços resultantes representados na Figura 19.

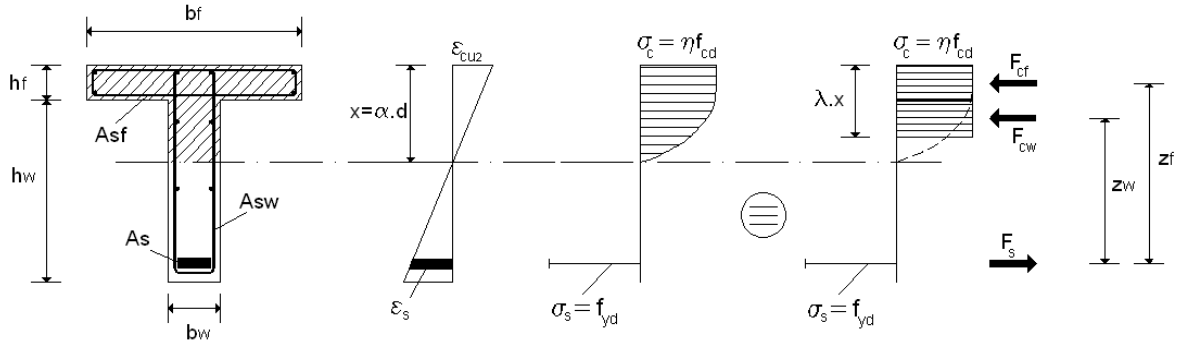


Figura 19. Secção em T sujeita à flexão simples, em estado limite último.

A determinação do valor da área de aço, A_s, passa pela resolução do sistema de equações da Expressão 35, baseado no sistema de equações da Expressão 8. Determina-se

o valor da profundidade do eixo neutro, x, usando o segundo membro do sistema, substituindo-o no primeiro membro. Posto isto, calcula-se o valor da armadura longitudinal (A_s).

$$\begin{cases} F_S = F_{cf} + F_{cw} \\ M_{RD} = F_{cf} \cdot z_f + F_{cw} \cdot z_w \end{cases} \Leftrightarrow \tag{35}$$

$$\begin{cases} As \cdot f_{yd} = h_f \cdot b_f \cdot f_{cd} + (0{,}8x - b_f) \cdot b_w \cdot f_{cd} \\ M_{RD} = h_f \cdot b_f \cdot f_{cd} \times \left(h_f + h_w - c - h_f/0{,}2\right) + (\lambda x - b_f) \cdot b_w \cdot f_{cd} \times \left(h_w - c - \dfrac{0{,}8x - h_f}{2}\right) \end{cases}$$

No caso da armadura de compressão ser necessária ($\alpha > \alpha_{max}$), deverá ser calculada à semelhança do descrito na secção 4.1.1.

4.1.3. Secção Circular

Apesar de não habitual, a situação de flexão simples numa secção circular, pode ser considerada no *XCoSec*.

A Figura 20 representa um exemplo de diagramas de tensões e extensões, assim como as forças internas geradas na secção em estado limite último, quando sujeita a um determinado momento flector M_{Ed}. Apesar desta figura representar uma secção com 6 varões, as formulações apresentadas abrangem secções com um número qualquer de varões.

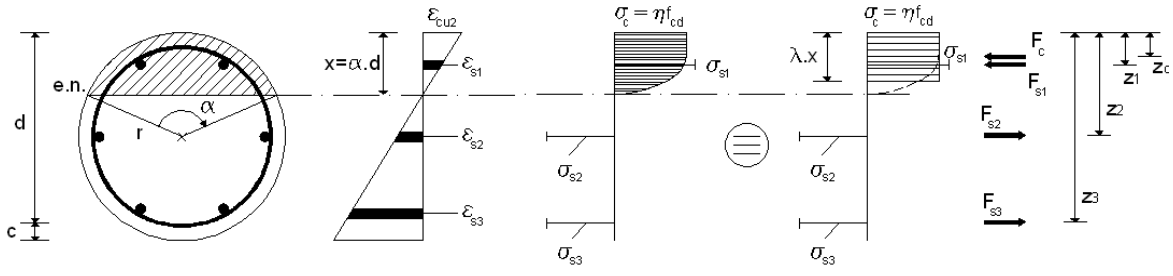


Figura 20. Secção circular sujeita à flexão simples, em estado limite último.

A determinação do valor das forças no aço F_{S_i}, passa pela resolução do sistema de equações da Expressão 36, baseado no sistema de equações da Expressão 8.

$$\begin{cases} F_C + \sum F_{S_i} = 0 \\ M_{Ed} = M_{Rd} = F_C z_C + \sum F_{S_i} z_i \text{ b} \end{cases} \quad (36)$$

Os valores de z_i são determinados recorrendo a princípios trigonométricos em função do número de varões, enquanto os valores de F_{S_i} são determinados pela Expressão 37.

$$F_{S_i} = \sigma_{S_i} A_{S_i}\ , \quad \text{em que} \quad \sigma_{S_i} = \min(\varepsilon_{S_i} E_S\ ;\ f_{yd}) \quad (37)$$

O valor da extensão no aço (ε_{S_i}) de um varão obtém-se usando as leis de variação de extensão apresentadas na Tabela 2.

A extensão em cada varão para uma determinada profundidade do eixo neutro (x) obtém-se usando as leis de variação de extensão, apresentadas na Tabela 2. O valor de z a considerar, resulta da diferença entre a profundidade do e.n. e a distância dos varões ao eixo ($x - z_i$).

O valor da força de compressão no betão F_c para um determinado valor de x define-se através da Expressões 38, 39, 40 e 41, baseadas em *Reis et al.* (2007).

$$F_c = A_c f_{yd} \quad (38)$$

$$A_c = \frac{r^2}{2}(\alpha - \sin\alpha) \quad (39)$$

$$z_c = r - \left[\frac{4r \cdot \sin\alpha}{3(\alpha - \sin\alpha)}\right] \quad (40)$$

$$\alpha = 2 \times \left[\arccos\left(\frac{r - x}{r}\right)\right] \quad (41)$$

Assim, estão definidos os parâmetros necessários à resolução do sistema de equações 36. As duas incógnitas são A_s (área de um nível de armadura constituído por dois varões de aço) e x. A determinação de ambas as variáveis é feita por iteração, atribuindo um valor inicial para x, e calculando o respectivo valor de A_s. Esse valor de A_s servirá para determinar um novo valor de x, repetindo-se o processo até que a variação do valor de A_s, entre duas iterações sucessivas, seja inferior a uma determinada tolerância especificada.

4.2.Flexão Composta Desviada

O dimensionamento de uma secção sujeita a flexão composta desviada consiste em determinar a armadura necessária à verificação da segurança através de sucessivos processos de verificação (ver secção 3.1), até se atingir a convergência para uma quantidade de armadura óptima.

Para realizar cada iteração, correspondente a uma verificação de segurança, é necessário definir a armadura da secção, isto é, o número de varões, respectivas áreas e localização. O utilizador define uma determinada disposição de armadura para que o programa possa atribuir áreas e posições aos varões, necessárias à resolução do método. Se, para um determinado valor de armadura, a segurança for verificada, atribui-se uma área de aço inferior na próxima iteração. Caso não se verifique a segurança, atribui-se uma área de aço superior. O processo é repetido até que se obtenham resultados de áreas de aço convergentes. O valor da área de aço a considerar em cada iteração é obtido através do método da secante.

O processo descrito é relativamente fácil de implementar no caso de secções onde as disposições de armadura são evidentes (secções rectangulares, em T ou circulares). No caso de secções mais irregulares, o processo torna-se mais complexo, motivo pelo qual, o dimensionamento se estendeu apenas às três secções referidas.

4.3.Esforço Transverso

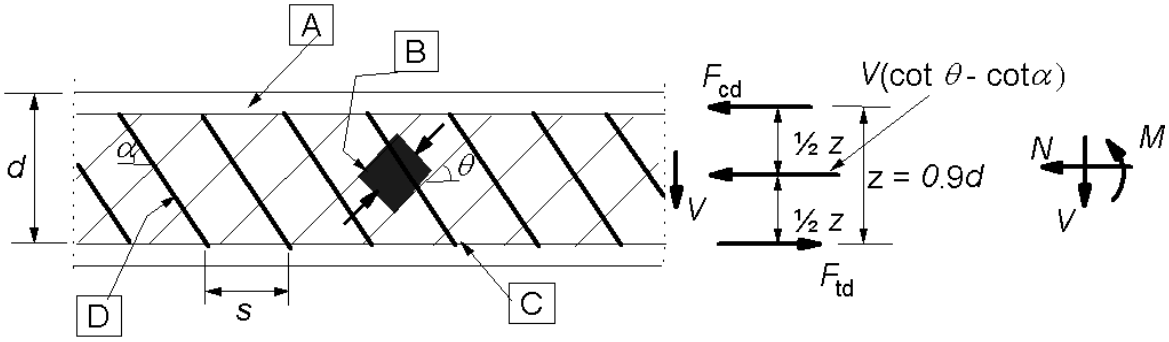
Segundo o EC2, a resistência ao esforço transverso de uma secção pode ser calculada considerando um sistema de treliça, formado por escoras comprimidas de betão associadas a tirantes constituídos pelas armaduras transversais traccionadas (Figura 21). Estabelecem-se os seguintes parâmetros:

$V_{Rd,c}$ – Valor de cálculo do esforço transverso resistente da secção sem armadura de esforço transverso.

$V_{Rd,s}$ – Valor de cálculo do esforço transverso equilibrado pela armadura de esforço transverso na tensão de cedência. Considera-se equivalente ao esforço transverso actuante V_{Ed}.

$V_{Rd,max}$ – Valor de cálculo do esforço transverso resistente máximo da secção, limitado pelas escoras comprimidas.

A Figura 21 ilustra o modelo de escora-tirante adoptado pelo EC2 para a análise do esforço transverso.



A - banzo comprimido, B - escoras, C - banzo traccionado, D - armadura de esforço transverso

Figura 21. Modelo de treliça usado na análise do esforço transverso (NP EN 1992-1-1, 2010).

O parâmetro θ representa o ângulo formado pela escora comprimida de betão e o eixo da viga. O EC2 impõe os valores para $cot\theta$ definidos pela Expressão 42.

$$1{,}0 \leq cot\theta \leq 2{,}5 \tag{42}$$

São referidas as seguintes condições de dimensionamento:

$V_{Ed} \leq V_{Rd,c}$ – Não é necessário o cálculo da armadura de esforço transverso, colocando apenas a armadura mínima preconizada no EC2.

$V_{Ed} \geq V_{Rd,c}$ – Adopta-se uma armadura de esforço transverso tal que $V_{Ed} \leq V_{Rd,s}$

Por defeito considera-se o valor máximo admissível de $cot\theta$ para o qual se verifica a capacidade resistente máxima da secção, $V_{Rd,max}$. Caso $V_{Rd,max} < V_{Ed}$, determina-se o valor de $cot\theta$ por iteração até que se verifique $V_{Rd,max} \geq V_{Ed}$. No caso de não ser cumprida a verificação, as dimensões da secção devem ser alteradas.

Impondo $V_{Rd,s} = V_{Ed}$, determina-se o valor de A_{sw}/s , com s igual ao espaçamento adoptado entre estribos.

4.3.1. Secção Rectangular

O EC2 fornece as seguintes expressões de cálculo de esforço transverso para secções rectangulares.

$$V_{Rd,c} = max\{\left[C_{Rd,c}k(100\rho_l f_{ck})^{1/3} + k_1\sigma_{cp}\right]b_w d\ ;\ \left(v_{min} + k_1\sigma_{cp}\right)b_w d\ \} \qquad (43)$$

em que:

k $= 1 + \sqrt{200/d} \leq 2{,}0$ com d em mm

ρ_l $= \frac{A_{sl}}{b_w d} \leq 0{,}02$

A_{sl} área da armadura longitudinal

b_w menor largura da secção transversal na área traccionada (mm)

σ_{cp} $= N_{Ed}/A_c < 0{,}2 f_{cd}$

N_{Ed} esforço normal na secção ($N_{Ed} > 0$ para compressão)

$C_{Rd,c}$ $= 0{,}18/\gamma_c$

v_{min} $= 0{,}035 k^{2/3} {f_{ck}}^{1/2}$

k_1 $= 0{,}15$

$$V_{Rd,s} = \frac{A_{sw}}{s}\ z\ f_{ywd} cot\theta \qquad (44)$$

$$V_{Rd,max} = \alpha_{cw}\ b_w\ z\ v_1 \frac{f_{cd}}{cot\theta + tan\theta} \qquad (45)$$

em que:

$\frac{A_{sw}}{s}$ área de armadura transversal por unidade de comprimento

α_{cw} $= 1{,}0$, para estruturas não pré-esforçadas

v_1 $= 0{,}6\left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right)$ com f_{ck} em MPa

4.3.2. Secção em T

Existem dois tipos de armadura transversal numa secção em T, a armadura transversal da alma (A_{sw}) e a armadura transversal do banzo (A_{sf}), que tem por objectivo resistir ao esforço de corte gerado na ligação entre a alma e os banzos.

A determinação de A_{sw} é feita adoptando os mesmos conceitos descritos na secção 4.3.1, admitindo a alma como secção resistente ($h = h_f + h_w$). Quanto à determinação de

A_{sf}, esta requer um dimensionamento específico, indicado no EC2. O método baseia-se no dimensionamento da ligação entre a alma e os banzos, de forma a garantir a resistência ao esforço de corte gerado na interface dos dois elementos.

O cálculo de A_{sf} inicia-se com a determinação da força de compressão gerada nos banzos, F_d, devido ao momento flector actuante, M_{Ed}. Gera-se na secção uma força de compressão do betão, F_c, e outra de tracção no aço, F_s, de valor igual. O momento actuante equivale ao binário originado pelas duas forças internas, distanciadas de um valor z, pelo que, se deduz a seguinte expressão:

$$M_{Ed} = F_c \times z \iff F_c = \frac{M_{Ed}}{z} \tag{46}$$

A força F_c pode ser decomposta em três forças, uma aplicada na alma, F_{cw}, e as restantes (de valor igual), aplicadas nos dois banzos (F_d). A Figura 22 exemplifica uma secção em T, com representação das forças internas geradas nos banzos.

O valor de F_d calcula-se através da razão entre o comprimento de cada banzo e o comprimento total, b_f (Expressão 47). A força de compressão no banzo depende do valor do momento actuante na secção. Assim, perante uma variação do momento flector, ΔM, ocorre no banzo, uma variação da força de compressão, ΔF_d, ao longo de um determinado comprimento, Δx (Figura 22). A tensão de corte desenvolvida na ligação entre banzo e alma da secção (v_{Ed}) determina-se através da Expressão 48.

$$F_d = F_c \times \left(\frac{\frac{b_f - b_w}{2}}{b_f} \right) \tag{47}$$

$$v_{Ed} = \frac{\Delta F_d}{h_f \times \Delta x} \tag{48}$$

À semelhança do sucedido na determinação da armadura transversal da alma, assume-se no banzo o modelo de escora/tirante abordado em 4.3.1 (Figura 21 e Figura 22). Seguindo a mesma filosofia, calcula-se a tensão de corte máxima admissível limitada pelas escoras comprimidas, $v_{Ed,max}$, na interface entre os banzos e a alma pela Expressão 49.

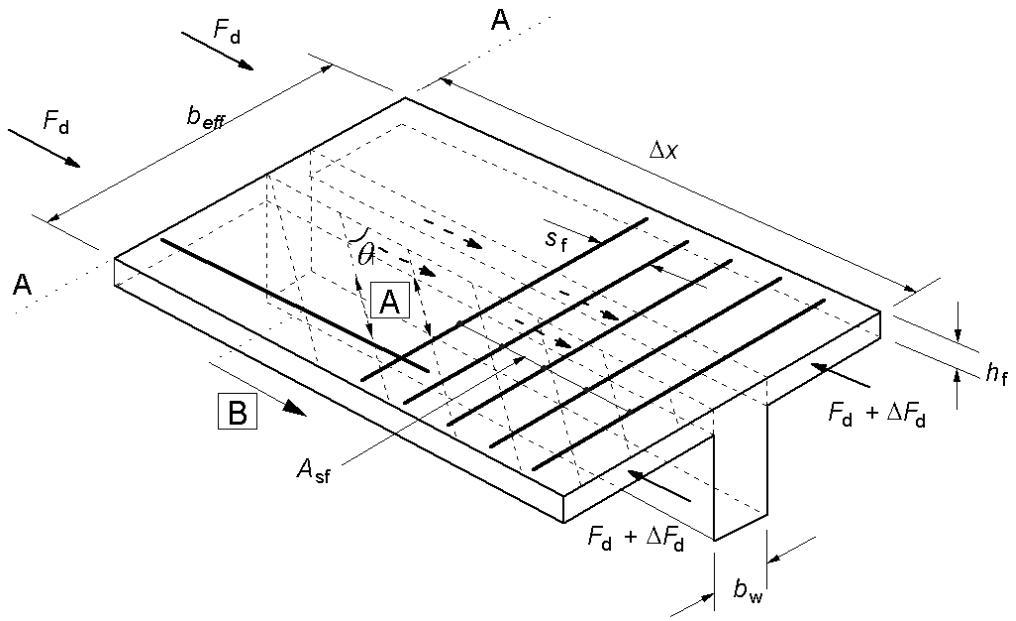


Figura 22. Ligação dos banzos com a alma – Notações (NP EN 1992-1-1, 2010).

$$\nu_{Ed,max} = \nu f_{cd} \frac{1}{cot\theta_f + tan\theta_f} \tag{49}$$

em que:

$\nu \quad = 0{,}6\left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right)$

$1{,}0 \leq cot\theta_f \leq 2{,}0$ para banzos comprimidos ($45^o \leq \theta_f \leq 26{,}5^o$)

$1{,}0 \leq cot\theta_f \leq 1{,}25$ para banzos traccionados ($45^o \leq \theta_f \leq 38{,}6^o$)

Inicialmente, a tensão de corte máxima é calculada considerando o valor máximo admissível para $cot\theta_f$. Caso não se verifique a condição anterior, determina-se o valor de θ_f, por iteração, até se verificar $\nu_{Ed} < \nu_{Ed,max}$.

O valor da armadura transversal nos banzos, A_{sf}, define-se através da Expressão 50, onde s_f é valor do espaçamento entres estribos.

$$\frac{A_{sf} f_{yd}}{s_f} \geq \nu_{Ed} \frac{h_f}{cot\theta_f} \tag{50}$$

Os espaçamentos s_w (estribos da alma) e s_f (estribos do banzo), deverão ser compatibilizados de forma a permitir uma correcta ligação entre ambos.

4.3.3. Secção circular

O dimensionamento de uma secção circular sujeita a esforço transverso é feito de forma semelhante às secções rectangulares (secção 4.3.1). Apesar de serem usadas as mesmas expressões, são estabelecidas algumas equivalências.

Para as secções rectangulares, b_w representa a largura da secção, d a altura efectiva e $b_w d$ a área efectiva de corte. No caso de uma secção circular, b_w é substituído por D, que corresponde ao diâmetro externo da secção, d é substituído por $0{,}8D$ e $b_w d$ é substituído pela área transversal da secção, $A_s = D^2\pi/4$ (CSI, 2009). Posto isto, obtêm-se as Expressões 51, 52 e 53, com base nas Expressões 43, 44 e 45.

$$V_{Rd,c} = max\left\{ \left[C_{Rd,c}k(100\rho_l f_{ck})^{1/3} + k_1\sigma_{cp}\right] D^2\pi/4 \;;\; \left(v_{min} + k_1\sigma_{cp}\right) D^2\pi/4 \right\} \quad (51)$$

em que:

k	$= 1 + \sqrt{200/(0{,}8D)} \leq 2{,}0$ com d em mm
ρ_l	$= \dfrac{A_{sl}}{D^2\pi/4} \leq 0{,}02$
A_{sl}	área da armadura de tracção
D	diâmetro exterior da secção transversal (mm)
σ_{cp}	$= N_{Ed}/A_c < 0{,}2 f_{cd}$ (MPa)
N_{Ed}	esforço normal na secção ($N_{Ed} > 0$ para compressão)
$C_{Rd,c}$	$= 0{,}18/\gamma_c$
v_{min}	$= 0{,}035 k^{2/3} {f_{ck}}^{1/2}$
k_1	$= 0{,}15$

$$V_{Rd,s} = \frac{A_{sw}}{s} z f_{ywd} cot\theta \quad (52)$$

$$V_{Rd,max} = \alpha_{cw} D z \nu_1 \frac{f_{cd}}{cot\theta + tan\theta} \quad (53)$$

em que:

z	$= 0{,}9(0{,}8D)$
α_{cw}	$= 1{,}0$, para estruturas não pré-esforçadas
ν_1	$= 0{,}6\left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right)$ com f_{ck} em MPa

4.4. Torção

O EC2 descreve o cálculo à torção para uma secção genérica, generalizável a todas as secções. A resistência à torção pode ser calculada com base numa secção fechada de paredes finas, na qual o equilíbrio é satisfeito por um fluxo fechado de tensões tangenciais (Figura 23). As secções cheias poderão ser idealizadas como secções ocas equivalentes, de paredes finas. No caso de secções ocas, a espessura equivalente da parede não deverá exceder a espessura real.

As secções de forma composta, como é o caso das secções em T, deverão ser divididas numa série de secções elementares (secções de paredes finas equivalentes), sendo a resistência à torção do conjunto, considerada igual à soma das resistências de cada elemento. A distribuição dos momentos torsores actuantes nas secções elementares deverá ser proporcional à rigidez de torção de cada uma delas, no estado não fendilhado.

A tensão tangencial na parede de uma secção genérica, sujeita a um momento torsor, T_{Ed}, é calculada pela Expressão 54.

$$\tau_{t,i} t_{ef,i} = \frac{T_{Ed}}{2A_k} \tag{54}$$

em que:

- T_{Ed} valor de cálculo o momento torsor aplicado (ver Figura 23)
- A_k área limitada pelas linhas médias das paredes, incluindo áreas interiores ocas
- $\tau_{t,i}$ tensão tangencial de torção na parede *i*
- $t_{ef,i}$ $\max(A/u\,;2c_{mec})$ ou $\max(A/u\,;t)$ para secções ocas, com t = espessura real
- A área total da secção transversal definida pelo contorno exterior (incluindo áreas interiores ocas)
- u perímetro do contorno exterior da secção

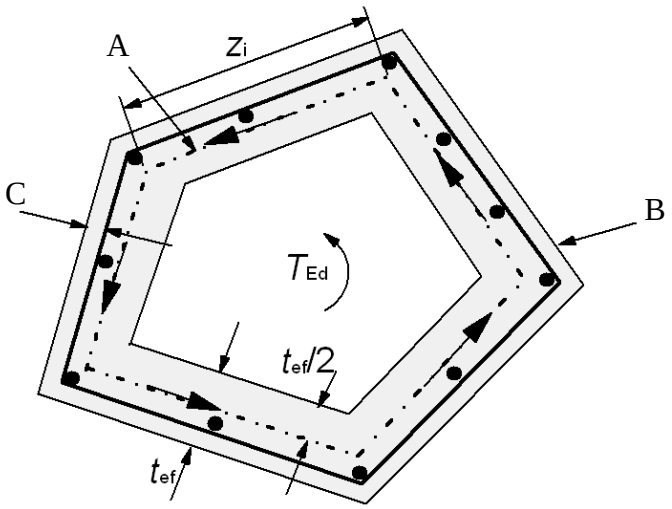
O esforço tangencial, $V_{Ed,i}$, numa parede i, devido à torção, é obtido pela Expressão 55.

$$V_{Ed,i} = \tau_{t,i} t_{ef,i} z_i \tag{55}$$

em que:

- z_i comprimento da parede *i*, definido pela distância entre os pontos de intersecção de paredes adjacentes

A Figura 23 ilustra algumas notificações e definições usadas na definição das Expressões 54 e 55.



A - linha média
B - face exterior da secção transversal, perímetro *u*
C - recobrimento

Figura 23. Notações e definições utilizadas neste capítulo.

Os efeitos da torção ($V_{Ed,i}$) e do esforço transverso (V_{Ed}) poderão ser sobrepostos, tanto para secções ocas como para secções cheias, adoptando-se o mesmo valor para a inclinação das escoras θ. Os limites de θ, indicados na Expressão 42, são também aplicáveis no caso da acção combinada de esforço transverso com torção. Em suma, a armadura transversal de uma secção sujeita ao esforço combinado (V_{Ed} + T_{Ed}), calcula-se com base nas expressões expostas na secção 4.3.

Quanto à armadura longitudinal de torção, $\sum A_{sl}$, poderá ser calculada pela Expressão 56.

$$\frac{\sum A_{sl} f_{yd}}{u_k} = \frac{T_{Ed}}{2A_k} cot\theta \qquad (56)$$

em que:

u_k perímetro da área A_k

θ ângulo das escoras comprimidas (ver Figura 21)

O valor de $\sum A_{sl}$ deve ser distribuído proporcionalmente pelo lados da secção, ou concentrado nos cantos, no caso de secções pequenas, adicionando-o às armaduras longitudinais já existentes.

A resistência máxima de um elemento sujeito aos esforços de torção e transverso é limitada pela resistência das escoras de betão. Para que esta resistência não seja excedida, deverá se satisfeita a seguinte condição:

$$\frac{T_{Ed}}{T_{Rd,max}} + \frac{V_{Ed}}{V_{Rd,max}} \leq 1{,}0 \tag{57}$$

em que:

T_{Ed} valor de cálculo do momento torsor

V_{Ed} valor de cálculo do esforço transverso

$T_{Rd,max}$ valor de cálculo do momento torsor resistente obtido pela Expressão 58

$V_{Rd,max}$ valor de cálculo do esforço transverso resistente máximo, de acordo com a Expressão 53

A capacidade resistente máxima de um elemento sujeito a torção é definida pela Expressão 58.

$$T_{Rd,max} = 2\nu\alpha_{cw} f_{cd} A_k t_{ef,i} \frac{1}{cot\theta + tan\theta} \tag{58}$$

Os valores de ν e α_{cw} estão expostos na Expressão 45 ($\nu = \nu_1$).

Como descrito anteriormente, as formulações apresentadas são facilmente generalizáveis a qualquer secção de betão armado. Porém, apenas se desenvolveu o método para secções rectangulares e circulares.

5. LINGUAGEM DE PROGRAMAÇÃO

A linguagem de programação usada para a concepção do programa de cálculo foi o C#. Consiste numa linguagem orientada a objectos (OOP - *Oriented Object Programming*), que usa como base a plataforma .NET (*.NET framework*), neste caso, na última versão 4.0.

5.1. Programação Orientada a Objectos

Segundo Watson *et al.* (2010), a programação orientada a objectos é um conceito de programação generalizado há relativamente pouco tempo, que procura resolver alguns problemas que surgem quando usadas técnicas tradicionais de programação.

A OOP já foi concebida há algum tempo atrás (no início da década de 70), vindo a sua origem da linguagem Simula (*Simula Language*), concebida na Noruega no início da década de 60, e como o nome indica, criada para fazer simulações (Leite e Júnior, 2010).

Anteriormente ao desenvolvimento desse método de programação, usava-se, e continua a usar-se, um tipo de programação, chamada de funcional ou também processual. Desse processo resultam as chamadas aplicações monolíticas, o que significa que todas as funcionalidades da aplicação são reunidas em poucos módulos de código (frequentemente num só). Numa aplicação tradicional, o código criado para execução da aplicação é normalmente simples e linear. Aí, os dados da aplicação são carregados na memória, inicia-se a execução no ponto A, acabando no ponto B e finalmente os dados são descarregados da memória. Usando técnicas de OOP, as coisas não são tão lineares. Embora os dois métodos levem aos mesmos resultados, o caminho para a obtenção dos mesmos é normalmente muito diferente (Watson *et al.*, 2010).

Para perceber melhor o funcionamento de um programa construído usando técnicas de programação orientada a objectos, pode-se usar a analogia entre um programa informático e um motor de automóvel. O motor de um automóvel é constituído por diversos componentes fulcrais ao seu funcionamento. Numa filosofia de OOP, pode-se fazer uma reparação, substituição, actualização de um componente sem intervir na globalidade do motor, mas sim apenas no componente em causa por uma pessoa especializada, proporcionando mais eficácia à operação. Numa filosofia monolítica, o motor é constituído por apenas um bloco, em que para efectuar alguma operação, seria

necessário uma intervenção do fabricante. Mas o que é na verdade um objecto? Pode-se representar um objecto como sendo uma das diversas partes que constituem um programa, onde está armazenada informação que pode ser um processo, uma série de dados ou outro tipo de membro usado na programação. De uma forma mais simples, um objecto pode ser assemelhado a uma estrutura que contém membros como variáveis ou funções. As variáveis consistem nos dados armazenados no objecto enquanto as funções permitem a obtenção destes dados e portanto, a funcionalidade do objecto (Watson *et al.*, 2010).

Existem alguns conceitos básicos essenciais definidos por Lassala (2010), no que diz respeito à utilização de técnicas de programação orientada a objectos. Estes são seguidamente citados, usando situações do quotidiano, para que os leitores que pela 1ª vez abordam este tema tenham uma melhor percepção destes conceitos.

5.1.1. Classe

Uma classe resume-se a um conjunto organizado de código que contém métodos (funções) e variáveis, que consiste num modelo para criar algo. Por exemplo, quando alguém pretende construir um edifício, usam-se as plantas como um modelo para a elaboração da obra. De forma análoga, a planta é uma classe e o edifício é o objecto. Uma classe não é usada directamente, ninguém irá habitar as plantas, mas sim o edifício. Deste modo, uma classe é utilizada somente para definir objectos baseados nela, sendo os objectos os elementos que são realmente utilizados.

5.1.2. Abstracção

A abstracção pode ser definida como a capacidade de representar cenários complexos, usando termos simplificados. Para ilustrar melhor este conceito pode pensar-se no exemplo de um carro. Um carro é uma abstracção de um veículo que um indivíduo pode utilizar para se mover de um ponto para outro. No quotidiano, ninguém diz: "Vou abrir a porta daquele veículo movido a combustível, vou entrar, sentar-me, ligar a ignição, pisar a embraiagem, colocar a primeira, acelerar e controlar a trajectória com o volante". Tal explicação não é necessária, sendo o conceito abstraído para algo que se conhece como "carro", em que basta dizer "vou usar o meu carro para ir para o trabalho amanhã", e qualquer pessoa irá entender. Num caso concreto, pode-se pensar numa caixa de texto e em todos os seus atributos (tamanho, cor, texto, etc.) e nas acções que lhe são atribuídas, que foi abstraída pela palavra *"TextBox"*. Neste ponto é importante perceber a diferença entre

classe e objecto. Quando é mencionado que algo complexo é abstraído em algo conhecido como *TextBox,* este é uma classe.

5.1.3. Encapsulamento

Pode definir-se o encapsulamento como a tarefa de tornar um objecto o mais auto-suficiente possível. Retomando como exemplo uma caixa de texto na janela de um programa, podem analisar-se os diversos detalhes que estão encapsulados no interior daquele objecto. Por exemplo, o programador não sabe ao certo (ou não precisa saber) como é que o sistema operativo irá efectuar a representação visual daquele objecto na janela, enviando sinais do CPU, para a placa gráfica, depois para o monitor, e por fim cria o objecto na posição que foi especificada previamente. O programador não necessita de se preocupar com este tipo de detalhe. É apenas necessário colocar a caixa de texto na tela e configurar algumas propriedades. Esta operação é possível devido ao objecto ser auto-suficiente para fazer sozinho a operação. Os conceitos de abstracção e encapsulamento estão interligados, visto que a abstracção define a entidade que representa um objecto complexo, e o encapsulamento esconde detalhes desse objecto, ou seja, do seu funcionamento, que poderia fazer qualquer pessoa desistir de o usar.

5.1.4. Herança

A herança define-se como a capacidade de uma classe herdar atributos e comportamentos de outra classe. Para uma mais fácil percepção deste conceito, pode tomar-se novamente o exemplo de um carro. Existem inúmeros tipos, marcas e modelos de carros, porém não é necessário reinventar a roda cada vez que um novo projecto é criado. Qualquer carro novo pode então herdar características e funcionamentos de projectos já existentes.

5.1.5. Polimorfismo

Literariamente, polimorfismo significa “muitas formas” ou “o estado de existir em muitas formas”. No mundo da programação, polimorfismo é definido como a capacidade de objectos diferentes possuírem métodos com o mesmo nome e a mesma lista de parâmetros que quando chamados executam tarefas de maneiras diferentes. É difícil expor a ideia de polimorfismo usando poucas palavras, por isso irá continuar-se a usar um exemplo do quotidiano para explicar o conceito. Tomando de novo o exemplo do carro, pode-se dizer que um carro é um veículo da mesma forma que uma moto e uma bicicleta também o são.

Todos os veículos possuem um meio para acelerar, independentemente do mecanismo que é usado para isso, (motor, pedais, etc.). Por outras palavras, podemos dizer que temos objectos diferentes (um carro, uma moto ou uma bicicleta), que derivam de uma mesma classe (veículo). Esta classe possui um método acelerar, e deste modo, podemos tirar partido do polimorfismo, invocando um método de mesmo nome, mas que possui um comportamento diferente para cada um dos objectos.

5.2. Características da Linguagem

O C# é uma linguagem extremamente expressiva, no que diz respeito à execução de conceitos modernos de programação. Foi desenvolvida por uma pequena equipa de dois distinguidos engenheiros da Microsoft, Anders Hejlsberg e Scott Wiltamuth. O primeiro, foi também responsável por passos notáveis na programação, como a criação do popular *Turbo Pascal* e pela liderança da equipa que criou o *Borland Delphi*, que foi um dos primeiros ambientes de desenvolvimento integrados de programação (Liberty e MacDonald, 2006).

A linguagem C# consiste numa evolução das linguagens C e C++, tendo contudo muitas influências de JAVA. Foi criada para incorporar muitos dos melhores recursos vindos de outras linguagens, com a vantagem de resolver alguns problemas de cada uma. Quando a Microsoft anunciou a primeira versão do C# (C# 1.0) em Julho 2001, a sua divulgação foi palco de um acontecimento ainda maior: o lançamento da plataforma .NET. Surgiu então uma linguagem criada especialmente para trabalhar com a nova plataforma. A plataforma .NET resume-se a uma estrutura de desenvolvimento que proporciona uma nova forma de criar aplicações, indo para além da programação tradicional para Windows e tornando a programação de aplicações mais rápida e fácil. O objectivo é reduzir o número de linhas de código necessárias para criar páginas *Web* ou Aplicações do Windows. Tal significa que, em vez de escrever longas linhas de código para criar aplicações, bases de dados, páginas *Web* ou ficheiros de dados, a plataforma .NET fornece uma vasta gama de comandos, previamente testados, que podem ser usados em novos projectos.

Segundo Watson *et al.* (2010), o C# é apenas uma das várias linguagens existentes, que pode ser usada para criar aplicações baseadas na plataforma .NET. Tem a vantagem de ser a única criada a partir do zero para usar a plataforma e consiste na principal linguagem,

que a usa, suportada por outros sistemas operativos. Como referido anteriormente, existem várias linguagens disponíveis para o desenvolvimento em .NET, mas para manter uma outra versão, como por exemplo o Visual Basic, o mais semelhante possível às versões antecessoras clássicas, certas características do código da .NET *library* não são completamente compatíveis ou pelo menos exigem uma sintaxe particular. Pelo contrário, o C# pode usar todas as características de código que a .NET *library* tem para oferecer.

Conclui-se então, que esta linguagem permite ao programador uma fácil extensibilidade dos trabalhos desenvolvidos, versatilidade e redução do tempo de execução, reflectindo-se no resultado final. Estes motivos justificam a escolha desta linguagem, na realização do presente trabalho.

6. PROGRAMA *XCOSEC*

No presente capítulo faz-se a descrição do programa *XCoSec*. Introduz-se o ambiente visual do programa, explicam-se as funcionalidades implementadas e a forma como deve ser iniciado um novo cálculo. O modo de utilização do programa está descrito de forma mais aprofundada no manual do utilizador, apresentado num documento anexo, onde se explica detalhadamente o seu funcionamento e a forma correcta de o usar. Associado a este, encontra-se um CD que contém o programa.

6.1. Iniciar o Programa e um Novo Cálculo

Ao iniciar o *XCoSec*, surge uma janela de abertura temporária (4 segundos), representada na figura abaixo, que fornece alguma informação acerca da versão e do âmbito de aplicação.

Figura 24. Aspecto da janela de abertura do *XCoSec*.

Depois de fechada a janela de apresentação, surge a janela principal do *XCoSec* onde irão ser executados os diferentes tipos de cálculos. A Figura 25 representa a janela principal aquando a sua abertura. É aconselhável que o utilizador consulte o manual de utilização antes da primeira utilização. Este está disponível em formato pdf e pode ser acedido através do item"ajuda" na barra de menus.

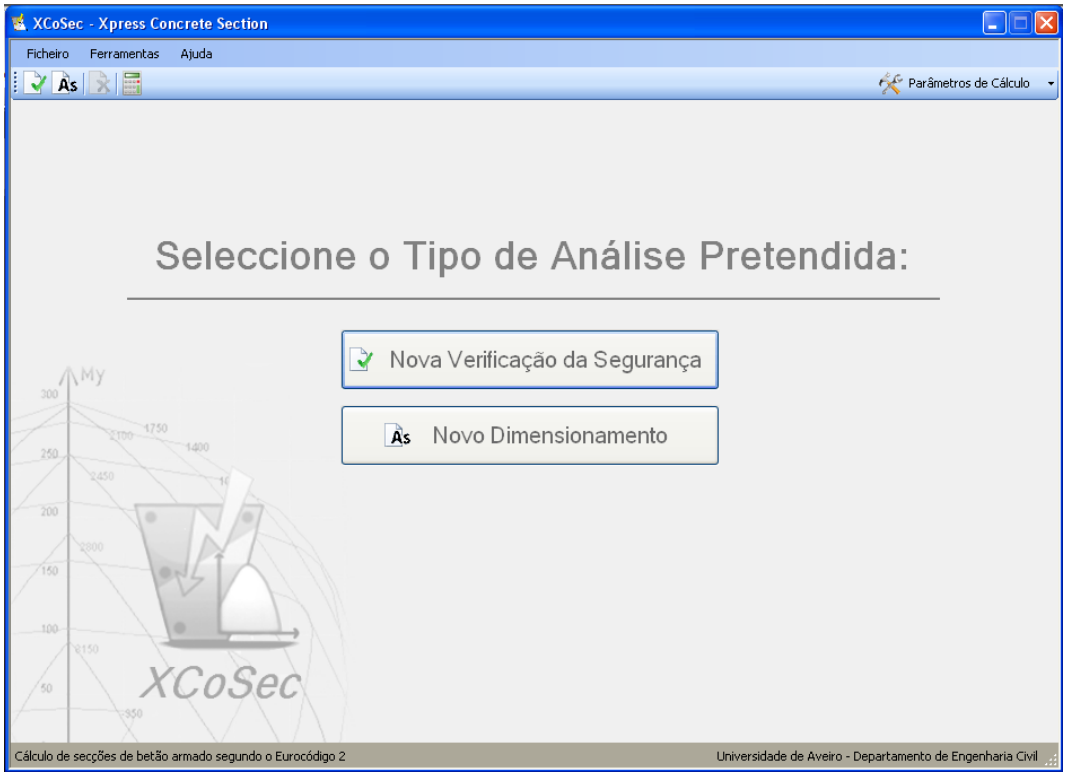
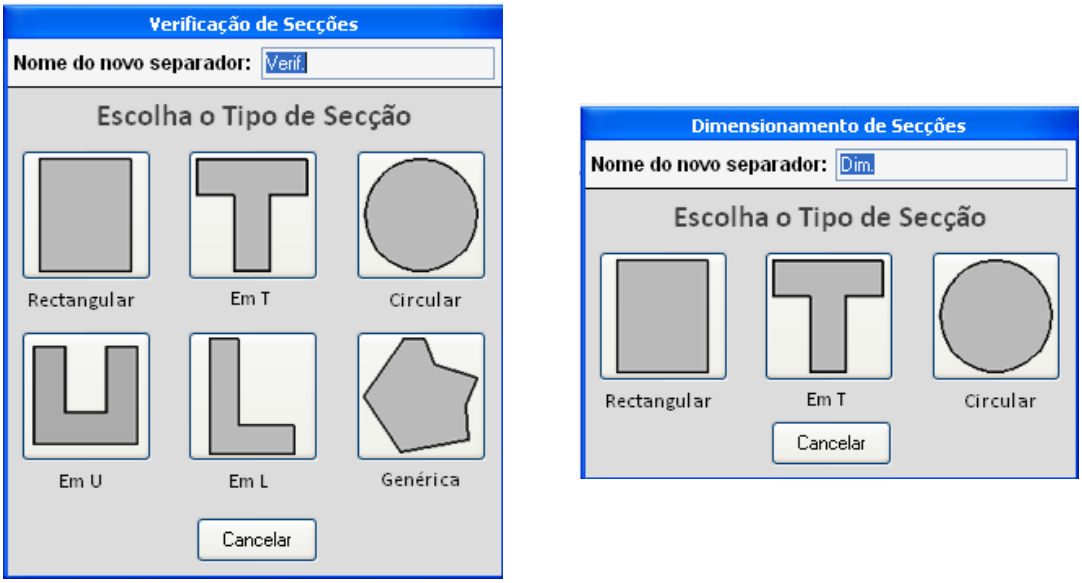


Figura 25. Aspecto da janela principal do *XCoSec*.

Para iniciar um novo cálculo, clica-se no ícone , no caso de se pretender uma verificação da segurança ou no ícone , caso se pretenda um dimensionamento. Escolhida a tarefa, surge uma janela que permite ao utilizador seleccionar o tipo de secção pretendida e definir o nome da tarefa. Na Figura 26a, apresentam-se as secções disponíveis para a verificação da segurança e na Figura 26b, para o dimensionamento.

Uma vez seleccionada a tarefa e a secção pretendida, surge na janela principal, um novo separador onde irá ser efectuado o cálculo. Este passo pode ser repetido ciclicamente para tarefas e secções diferentes, criando-se um novo separador. Esta funcionalidade permite ao utilizador executar várias tarefas em simultâneo, possibilitando a comparação de diversas soluções, dando assim maior versatilidade ao programa. Cada separador pode ser fechado separadamente, a qualquer momento, seleccionando-o e clicando no ícone , na barra de ferramentas, ou no ícone do separador activo (Figura 27).

A Figura 27 ilustra a janela principal do programa, após terem sido gerados vários separadores de cálculo diferentes.



a) b)

Figura 26. Janelas de selecção da secção. Em a) verificação da segurançae em b) dimensionamento.

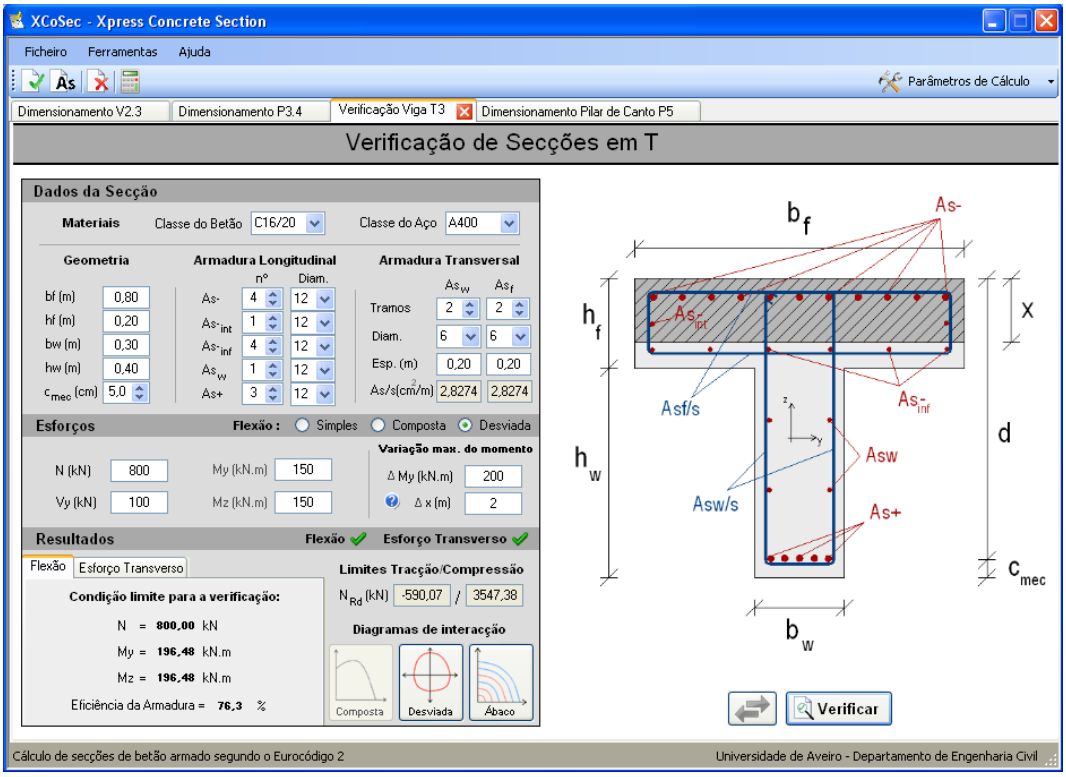


Figura 27. Janela principal do *XCoSec* com várias tarefas iniciadas em simultâneo.

6.2. Funcionalidades do Programa

6.2.1. Tipos de análise

De acordo com as habituais tarefas realizadas no âmbito da análise de secções de betão armado, o *XCoSec* propõe dois tipos distintos de cálculo: a verificação da segurança e o dimensionamento.

Enquanto a verificação da segurança se encontra disponível para cinco secções predefinidas e para secções quaisquer definidas pelo utilizador, o dimensionamento está disponível apenas para três tipos de secções (as mais comuns).

6.2.2. Secções disponíveis

No que diz respeito à verificação da segurança, são disponibilizados cinco tipos de secções predefinidas: rectangulares, circulares, em T, em U e em L. Estas são secções correntes que provavelmente irão representar a maioria dos cálculos efectuados pelos utilizadores do programa. Uma vez que o código computacional é genérico para todas as secções, disponibilizou-se uma ferramenta que permite a definição de secções de geometria qualquer, pelas posições dos seus vértices e armaduras através de tabelas de introdução de dados. A Figura 28 ilustra a verificação da segurança de uma secção irregular.

No caso do dimensionamento, optou-se por disponibilizar três tipos secções predefinidas: secções rectangulares, em T e circulares. Neste processo, o programa precisa de admitir, previamente, qual a o número e posição das armaduras na secção. No caso das três secções referidas, a disposição de armaduras é simples. Secções com disposições mais complexas ou de maiores dimensões, como em U por exemplo, possuem critérios específicos de disposição de armadura, não abrangidos no âmbito deste trabalho.

6.2.3. Esforços

O *XCoSec* abrange, para qualquer secção, todos os tipos de flexão: simples (M_y), composta ($M_y + N$) e desviada ($M_y + M_z + N$).

Relativamente ao esforço transverso, este pode ser considerado em ambas as direcções ($V_y + V_z$), em todas as secções, excepto em secções em T e U (nas quais só é admitido segundo o eixo y - vertical) e nas secções definidas pelo utilizador (nas quais não é admitido em nenhuma das direcções).

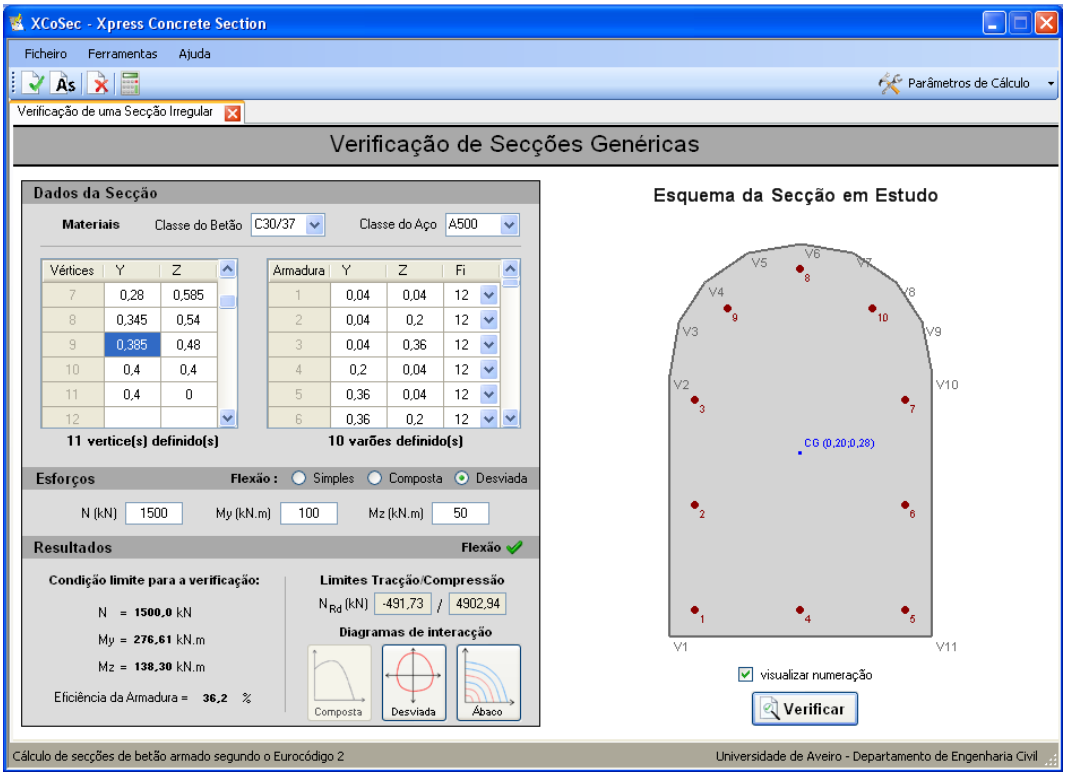


Figura 28. Exemplo da modelação de uma secção de forma irregular.

Quanto à torção, optou-se por disponibilizar o cálculo apenas no dimensionamento de secções rectangulares e circulares e não na verificação.

6.2.4. Materiais

Para tornar mais rápida a entrada de dados no programa, implementou-se uma biblioteca de dados, que contém materiais predefinidos para o cálculo. Como já referido, os materiais disponíveis são o aço e o betão.

No que diz respeito ao betão, as classes disponíveis vão desde C12/15 até C90/105. As características de cada classe de betão figuram na Tabela 1. Relativamente ao aço, existem três classes disponíveis, A235, A400 e A500.

6.3. Resultados do Programa

6.3.1. Verificação da segurança

Em todos os casos de flexão, o programa devolve os esforços resistentes da secção, que permitem efectuar a verificação da segurança. No caso da flexão simples, devolve o

momento máximo admissível, $M_{y,Rd}$. Relativamente à flexão composta, devolve o momento máximo admissível na secção, $M_{y,Rd}$, quando $N_{Rd} = N_{Ed}$. No caso da flexão desviada, devolve o par de momentos resistentes admissíveis (proporcionais aos actuantes), $M_{y,Rd}$ e $M_{z,Rd}$, quando $N_{Rd} = N_{Ed}$. Através dos valores dos esforços resistentes e dos esforços actuantes, é calculado e apresentado o nível de aproveitamento da secção.

De forma analisar o comportamento de uma determinada secção (com geometria e armaduras definidas) sujeita à flexão composta/desviada, foram desenvolvidas ferramentas gráficas que permitem visualizar diagramas de interacção, representativos dos esforços resistentes da secção. Estas ferramentas permitem o traçado de diagramas de flexão composta (M_y-N), diagramas de flexão desviada (M_y- M_z) e de superfícies tridimensionais de flexão desviada sob forma de ábacos (N- M_y- M_z).

O diagrama de interacção de flexão composta, relaciona o momento resistente segundo o eixo y, $M_{y,Rd}$, com o esforço axial resistente da secção, N_{Rd}. A Figura 29 é um exemplo do diagrama produzido pelo *XCoSec* no caso de uma secção em T, sujeita a flexão composta.

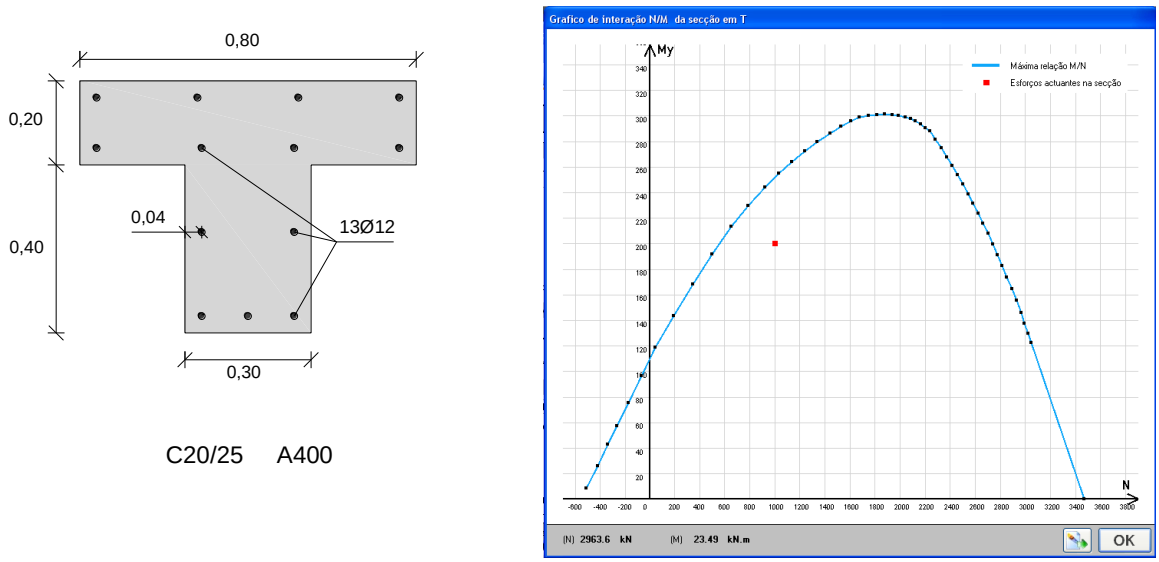
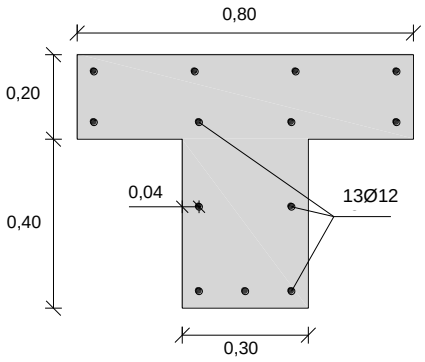


Figura 29. Exemplo de um diagrama de flexão composta de uma secção em T (dimensões em m).

O diagrama de interacção de flexão desviada, relaciona o momento resistente segundo y, $M_{y,Rd}$, com o momento resistente segundo z, $M_{z,Rd}$, para um determinado esforço axial resistente, N_{Rd}. Para a mesma secção em T e um valor de N_{Rd}=1000 kN, obtém-se o diagrama da Figura 30.



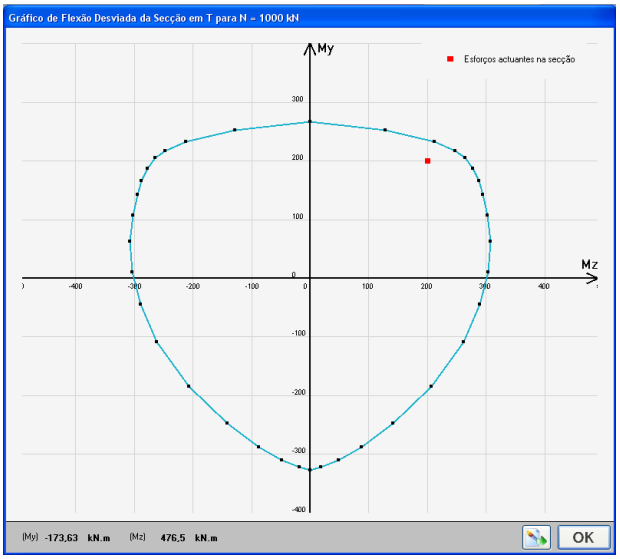
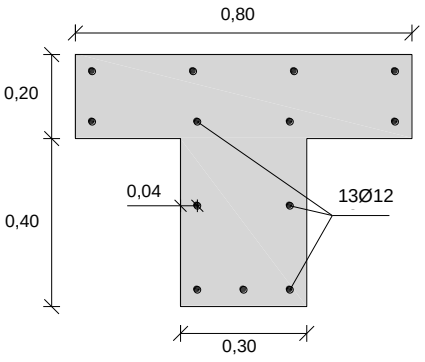


Figura 30. Exemplo de um diagrama de flexão desviada de uma secção em T (dimensões em m).

Os ábacos de flexão desviada representam a superfície de flexão desviada de uma determinada secção através do traçado sucessivo de curvas de nível, correspondentes aos respectivos diagramas de flexão desviada. O intervalo, ΔN_{Rd}, para o qual são geradas as curvas é definido pelo utilizador após o programa indicar um intervalo adequado, que corresponde à representação de um ábaco através de 6 a 11 curvas. A Figura 31 ilustra um exemplo de um ábaco com curvas de interacção geradas com intervalo de 400 kN.



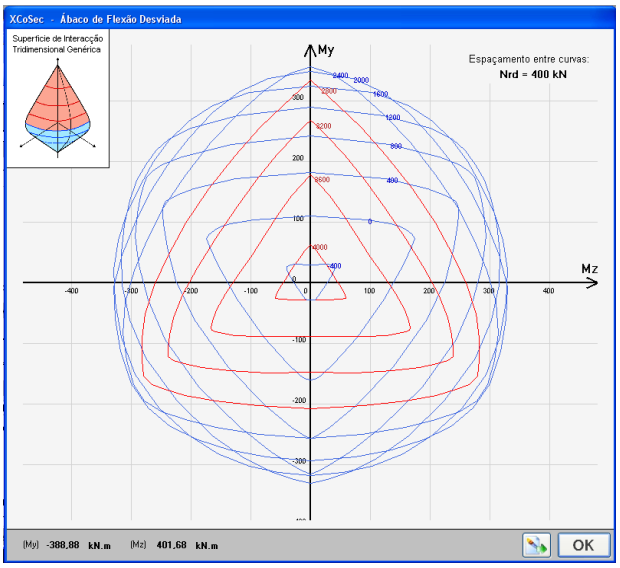


Figura 31. Exemplo de um ábaco de flexão desviada de uma secção em T (dimensões em m).

A Figura 32 ilustra a janela de definição do intervalo ΔN_{Rd}, para o qual serão geradas as curvas de interacção.

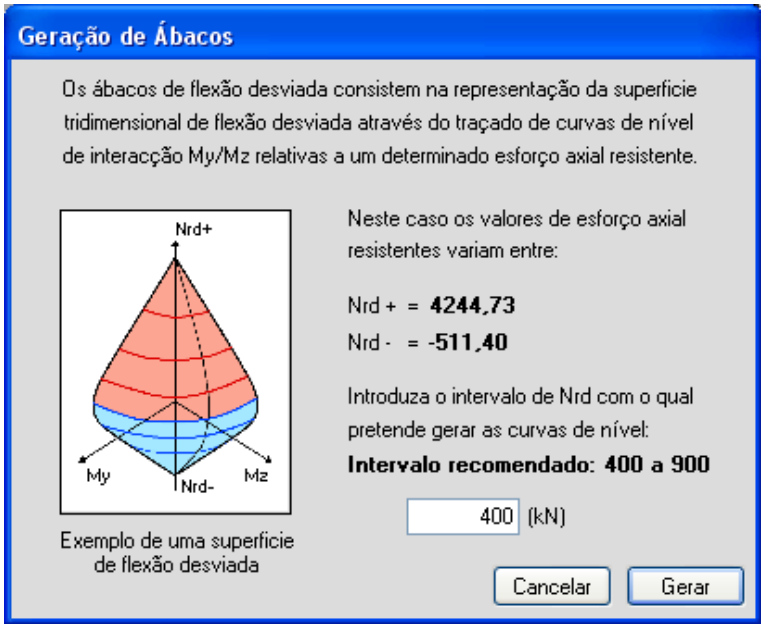


Figura 32. Janela de introdução do intervalo ΔN_{Rd}, para o traçado dos ábacos de flexão desviada.

Numa janela de verificação, a visualização do diagrama de interacção de flexão composta, o diagrama de interacção de flexão desviada ou o ábaco de flexão desviada, é realizada clicando nos ícones , ou , respectivamente (Figura 27 e Figura 28).

Quanto ao esforço transverso, o programa calcula a quantidade de armadura transversal, A_s/s, necessária à garantia da segurança, nas direcções y e z, e compara-a com a existente. São também apresentados alguns parâmetros como: $V_{Rd,c}$, $cot\theta_w$ e $V_{Rd,max}$, no caso da armadura transversal da alma e ν_{Ed}, $\nu_{Ed,max}$, $cot\theta_f$ e ΔF_d, no caso da armadura transversal de ligação entre alma e banzo.

Em ambos os casos de flexão, o programa devolve o esforço axial máximo admissível em tracção/compressão simples.

À medida que o utilizador introduz os dados geométricos da secção e respectiva armadura, o *XCoSec* cria uma representação da secção à escala de modo a verificar a correcta introdução dos dados, como mostra a Figura 28.

6.3.2. Dimensionamento

As três secções disponíveis podem ser sujeitas a todo o tipo de flexão, à excepção da secção em T, que não permite o dimensionamento à flexão desviada.

O programa devolve os valores de áreas de aço necessárias consoante, os parâmetros de distribuição de armadura definidos pelo utilizador. No caso da secção rectangular, o utilizador define a consideração ou não de armadura de compressão (flexão simples), a percentagem de distribuição de armadura superior/inferior (flexão composta) ou o número de varões requeridos em cada face (flexão desviada). No caso da secção em T, o utilizador define a percentagem de distribuição de armadura no banzo (inferior e superior) e na parte inferior, para flexão simples e composta. Em secções circulares, define-se o número de varões a colocar na secção, para qualquer caso de flexão.

Além dos valores de armadura o *XCoSec* devolve o valor da profundidade do eixo neutro (x) e a sua inclinação (α), para a solução encontrada. Uma vez calculadas as áreas de aço necessárias e atribuída uma armadura, torna-se possível determinar o aproveitamento da solução em termos percentuais, calculando o quociente entre a área de aço óptima determinada e a área da armadura colocada na secção.

Após a definição da armadura longitudinal, o programa representa a secção de forma a visualizar a disposição dos varões de aço na secção, conforme o diâmetro escolhido, tal como acontece no caso da verificação da segurança (Figura 33).

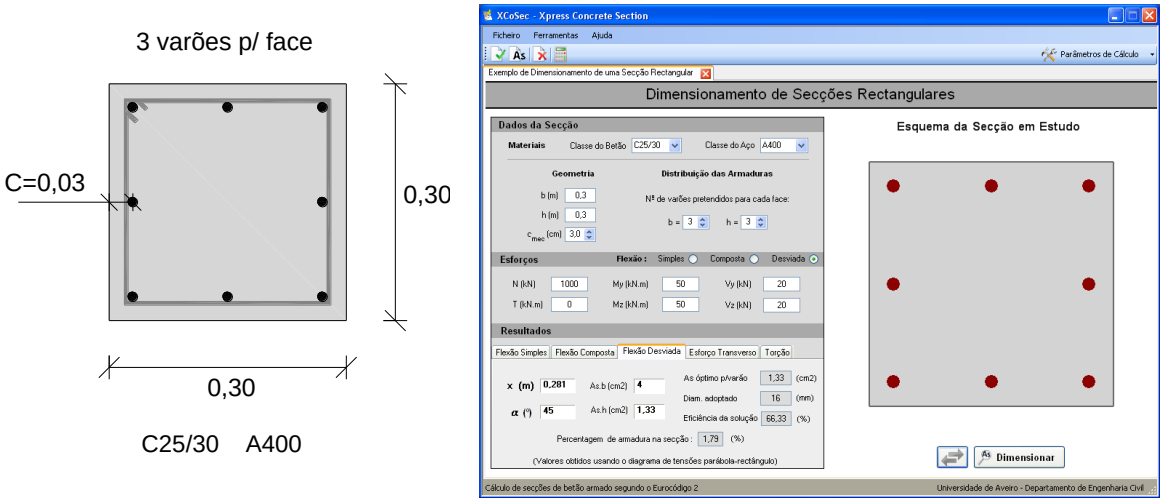


Figura 33. Resultados obtidos após o dimensionamento de uma secção rectangular (dimensões em metros).

Quanto ao esforço transverso, o programa calcula a quantidade de armadura transversal, A_s/s, necessária à garantia da segurança, nas direcções y e z. São também apresentados alguns parâmetros como: $V_{Rd,c}$, $cot\theta_w$ e $V_{Rd,max}$ (armadura transversal da alma) e v_{Ed}, $v_{Ed,max}$ e $cot\theta_f$ (armadura transversal de ligação entre alma e banzo).

6.4.Parâmetros de Cálculo

O *XCoSec* permite alterar alguns parâmetros necessários ao cálculo através da janela principal, clicando no ícone da barra de ferramentas (Figura 34).

Figura 34. Janela de definição de parâmetros com exemplo de dois separadores de ajuste.

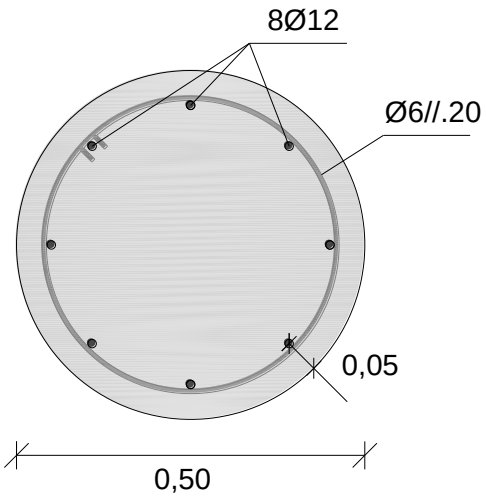
Os parâmetros possíveis de alterar consistem essencialmente nos coeficientes de segurança dos materiais, na precisão da discretização das secções para o dimensionamento/verificação da segurança e nos parâmetros de visualização dos diagramas de interacção. É ainda possível visualizar os parâmetros de cálculo de cada classe de betão e aço, calculados pelo programa segundo o prescrito no EC2. O ajuste dos parâmetros de cálculo está explicado com mais pormenor no manual de utilização do programa ou clicando nos ícones , situados na janela de parâmetros (Figura 34).

7. EXEMPLOS PRÁTICOS

Neste capítulo resolvem-se alguns exemplos práticos de verificação e dimensionamento de secções de betão armado, através do *XCoSec*. Os resultados dos exemplos 1, 3 e 4 foram conferidos através de ábacos e tabelas de dimensionamento existentes (Barros e Figueiras, 2010). Não são tidas em conta as disposições mínimas de armadura a colocar na secção, segundo o prescrito no EC2. Assim, os valores apresentados resultam directamente do cálculo orgânico da secção.

7.1. Exemplo 1 – Verificação da segurança de uma secção circular sujeita à flexão desviada e esforço transverso.

Pretende-se fazer a verificação da segurança da secção transversal de um pilar circular, com as características indicadas na Figura 35.



Esforços:

N_{Ed} = 2500 kN

$M_{y,Ed}$ = 150 kN.m

$M_{z,Ed}$ = 100 kN.m

$V_{y,Ed}$ = 50 kN.m

$V_{z,Ed}$ = 100 kN.m

Materais:

A500

C30/37

Figura 35. Esquema da secção circular a verificar (dimensões em metros).

Apesar da secção estar sujeita à flexão desviada, esta situação resume-se a um problema de flexão composta pelo facto da secção ser simétrica, independentemente da inclinação do e.n.. Assim, o valor dos esforços actuantes, M_{Ed} e V_{Ed}, considerados, para a verificação, consiste na soma vectorial dos esforços, em ambas as direcções, y e z, obtendo-se $M_{Ed,eq} = \sqrt{150^2+100^2} = 180{,}3$ kN.m e $V_{Ed,eq} = \sqrt{100^2+50^2} = 111{,}8$ kN.

No que diz respeito à flexão, o *XCoSec* devolve o momento máximo para o qual se esgota a capacidade resistente da secção, tendo em conta o esforço axial actuante, N_{Ed}. Neste caso verificou-se $M_{Ed,max}$ = 230,90 kN.m (> 180,3 kN.m), pelo que se verifica a segurança relativamente à flexão. O aproveitamento da armadura longitudinal para os momentos considerados é de 78,10 %.

No que diz respeito ao esforço transverso, o programa devolve o valor da armadura transversal necessária, A_{sw}/s, dado $V_{Ed,eq}$, obtendo-se A_{sw}/s = 2,86 cm^2/m. A armadura existente de Ø6//.20 equivale a um valor de A_{sw}/s = 2,83 cm^2/m. Como 2,86 < 2,83, não se verifica a segurança em relação ao esforço transverso.

A Figura 36 ilustra a introdução de dados e os resultados do programa.

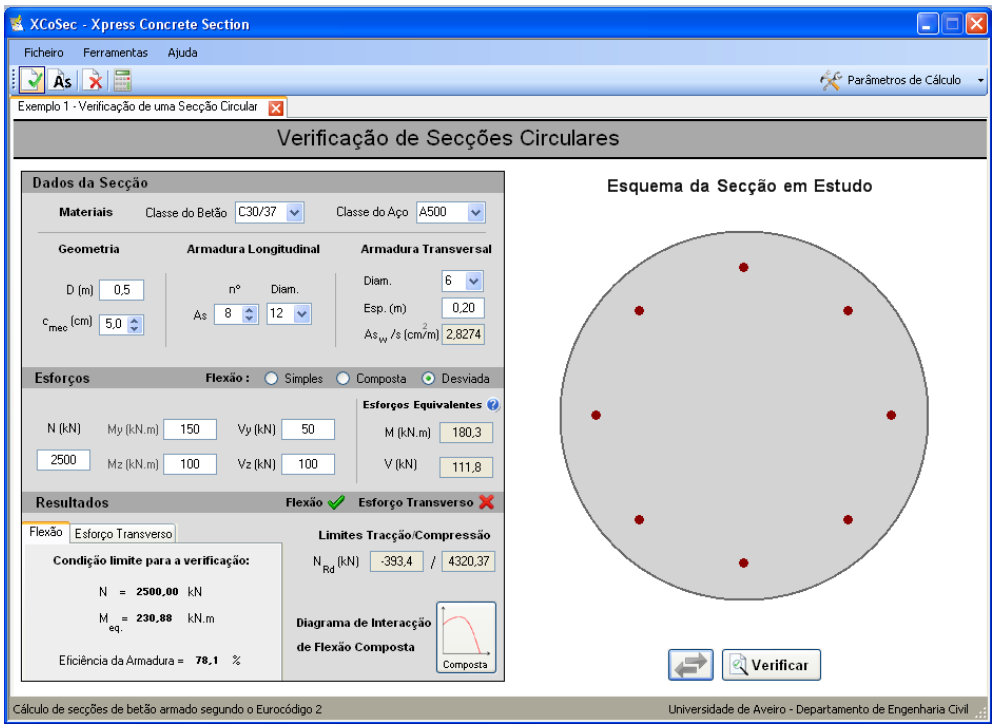


Figura 36. Introdução de dados no programa (exemplo 1).

A segurança em relação à flexão pode ser verificada através da obtenção do diagrama de interacção $M_{Ed,eq}$ - N, onde é possível analisar o nível de aproveitamento da capacidade resistente da secção (distância relativa do ponto à curva). A Figura 37 consiste no diagrama de interacção de flexão composta obtido, onde é representado o ponto correspondente aos esforços actuantes ($x = N_{Ed}$ e $y = M_{y,Ed}$).

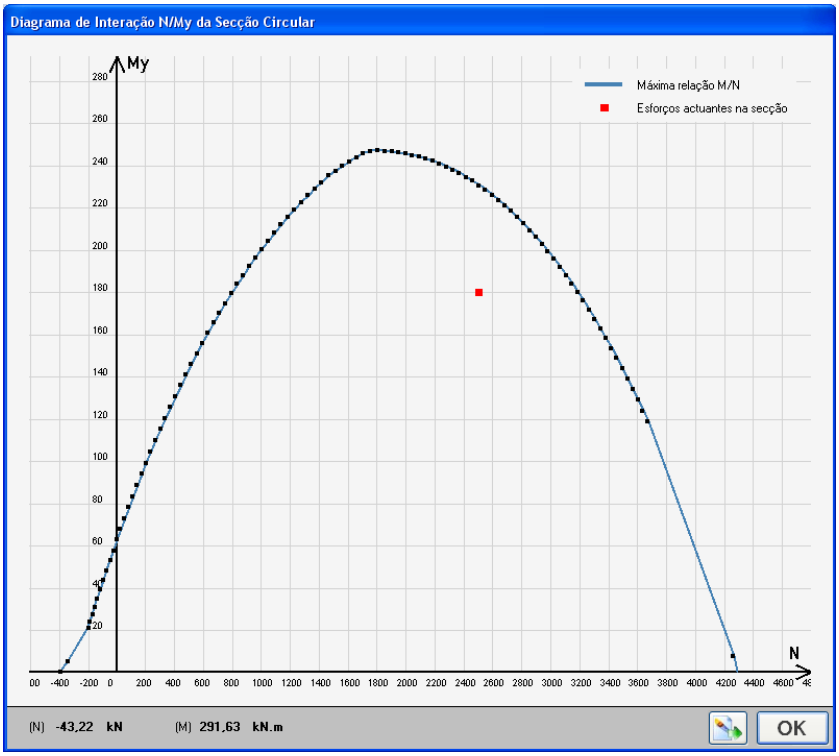
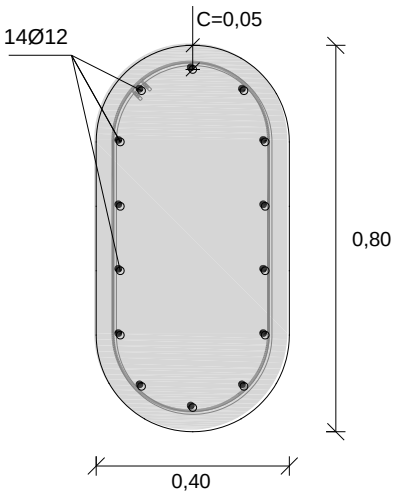


Figura 37. Diagrama de interacção de flexão composta da secção circular (exemplo 1).

7.2. Exemplo 2 – Verificação de uma secção irregular sujeita à flexão desviada

Pretende-se fazer a verificação da segurança de um pilar de secção irregular oval com as características indicadas na Figura 38.



Esforços:

N_{Ed} = 5000 kN

$M_{y,Ed}$ = 200 kN.m

$M_{z,Ed}$ = 100 kN.m

Materais:

A500

C30/37

Figura 38. Esquema da secção oval a verificar (dimensões em metros).

O *XCoSec* devolve os momentos máximos, proporcionais aos actuantes, ($M_{Ed,y,max}$ e $M_{Ed,z,max}$), para os quais se esgota a capacidade resistente da secção, dado um determinado esforço axial actuante, N_{Ed}. Neste caso verificaram-se os seguintes momentos máximos: $M_{Ed,y,max}$ = 239,64 kN.m e $M_{Ed,z,max}$ = 119,97 kN.m, pelo que se verifica a segurança relativamente à flexão desviada.

A Figura 39 ilustra a introdução de dados no programa e a combinação de esforços para a qual se verifica a segurança.

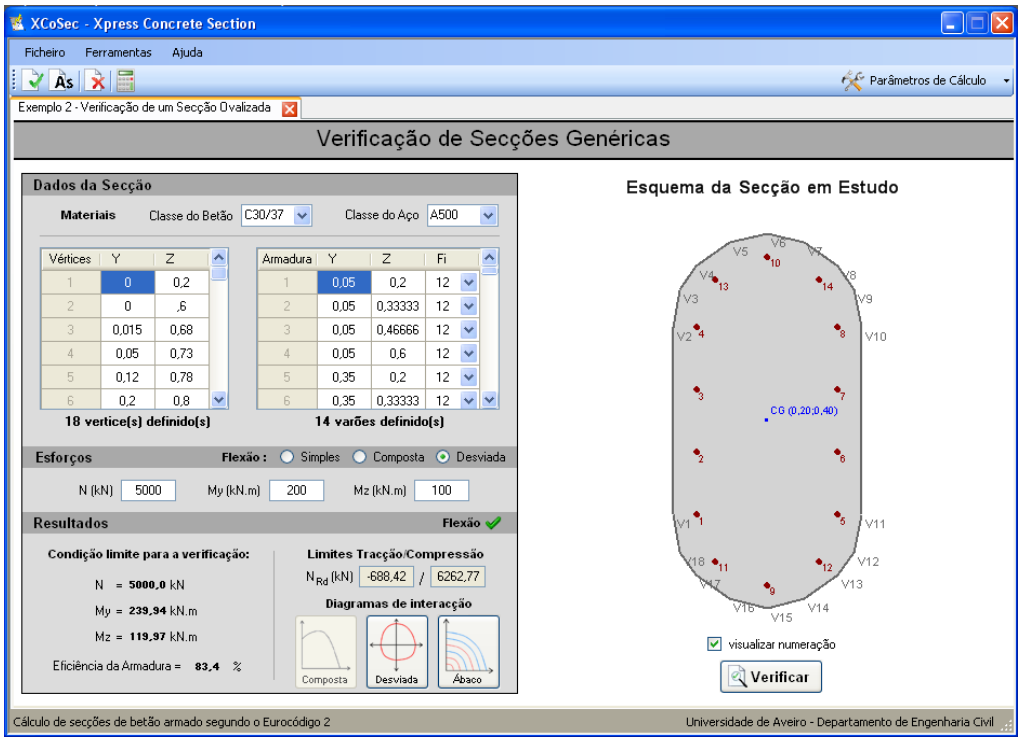


Figura 39. Introdução de dados no programa (exemplo 2).

A segurança pode ser comprovada através do traçado do diagrama de interacção de flexão desviada, para N_{Rd} = 5000 kN (Figura 40). Verifica-se aí, o bom aproveitamento da secção (83,4 %), pela proximidade do ponto representado, à curva de interacção.

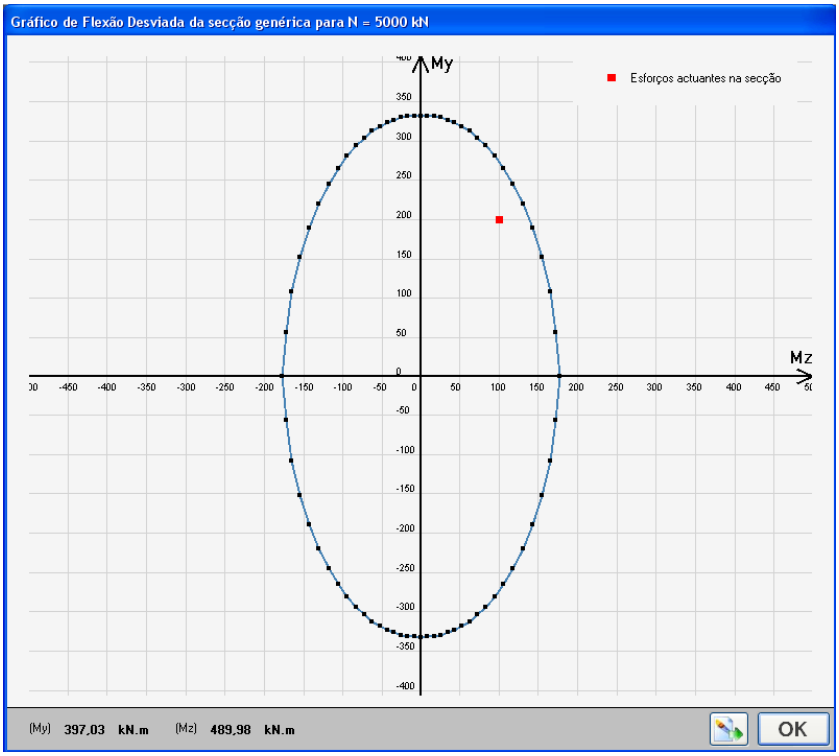
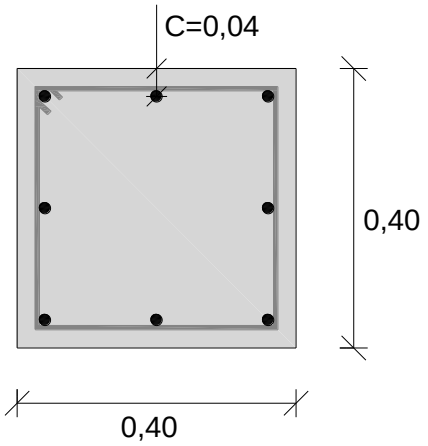


Figura 40. Diagrama de interacção M_y - M_y da secção oval (exemplo 2).

7.3. Exemplo 3 – Dimensionamento de uma secção rectangular sujeita à flexão desviada e esforço transverso

Pretende-se fazer o dimensionamento da secção transversal de um pilar quadrangular, com as características indicadas na Figura 41.



Esforços:

N_{Ed} = 2000 kN

$M_{y,Ed}$ = 150 kN.m

$M_{z,Ed}$ = 100 kN.m

$V_{y,Ed}$ = 80 kN

$V_{z,Ed}$ = 50 kN

Materais:

A500

C30/37

Condições:

3 varões por face

Figura 41. Esquema da secção rectangular a dimensionar (dimensões em m).

No caso do dimensionamento à flexão, o *XCoSec* necessita de atribuir uma posição às armaduras longitudinais na secção, pelo que o utilizador define a partida o número de varões pretendidos em cada face. Como resultados do dimensionamento à flexão desviada, obtêm-se a área de aço óptima de um varão (A_s), a profundidade do eixo neutro (x) e respectiva inclinação (α), o diâmetro comercial adoptado para os varões, por excesso, entre 6 e 32 mm (Ø), a eficiência em termos percentuais da armadura determinada (relação entre área de aço óptima e a colocada) e taxa de armadura na secção em percentagem. Consequentemente, obtêm-se os seguintes resultados: As = 1,61 cm^2, x = 0,37 m, α = 36,1º, Ø = 16 mm, aproveitamento da armadura = 80,17 % e taxa de armadura na secção = 1,01 %.

No caso do dimensionamento ao esforço transverso em ambas as direcções, o programa determina a armadura a adoptar para cada direcção, considerando $V_{Ed,y}$ e $V_{Ed,z}$ a actuar separadamente. Os resultados obtidos são o esforço transverso resistente da secção sem armadura ($V_{Rd,c}$), o esforço transverso resistente da secção limitado pelo esmagamento das escoras comprimidas ($V_{Rd,max}$), o valor de $cot\theta$ mais favorável, a área de armadura transversal (A_{sw}/s) e o respectivo espaçamento dado o diâmetro dos varões e o número de ramos pretendidos. Neste caso, a armadura mais desfavorável verifica-se na direcção y, onde se obtêm os seguintes resultados: $V_{Rd,c}$ = 183,63 kN, $V_{Rd,max}$ = 471,92 kN, $cot\theta$ = 2,50, A_{sw}/s = 2,27 cm^2/m e para 2 ramos com varões Ø6: espaçamento = 24,90 cm. Neste caso, como $V_{Rd,c} > V_{Ed,y}$, apenas seria necessário colocar a armadura mínima prescrita no EC2.

A Figura 42 ilustra a secção dimensionada pelo programa.

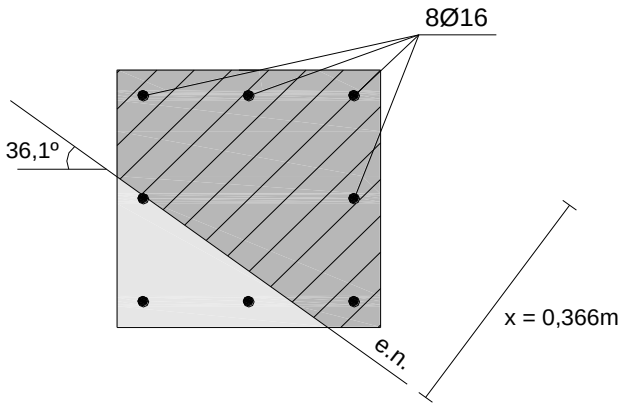


Figura 42. Secção rectangular após dimensionamento à flexão desviada.

A Figura 43 ilustra a introdução de dados no programa, os resultados obtidos e o esquema da disposição da armadura longitudinal na secção.

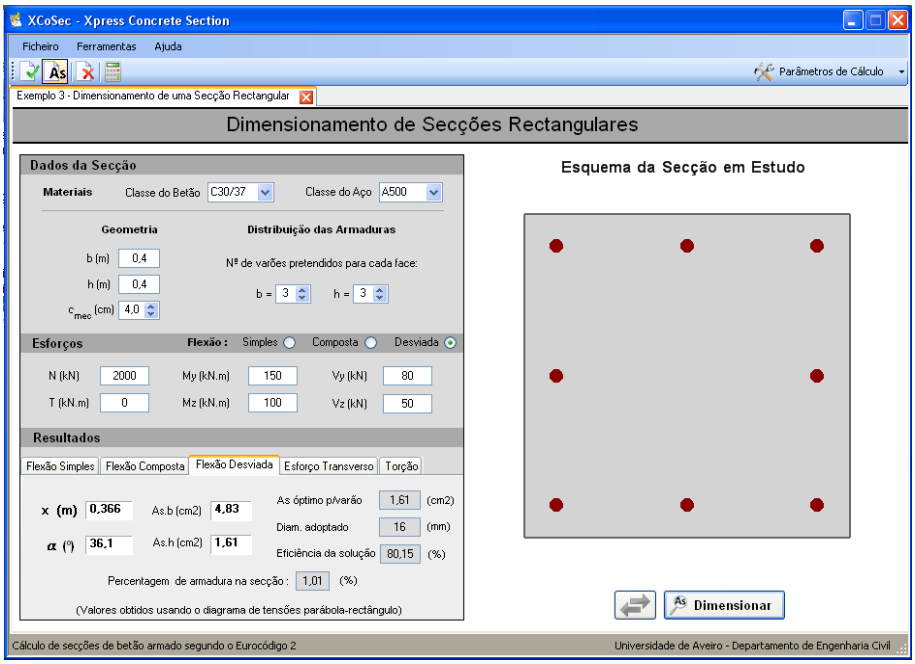


Figura 43. Introdução de dados no programa (Exemplo 3).

O dimensionamento pode ser validado fazendo a verificação da segurança secção obtida, para a qual se obtém o seguinte diagrama de interacção M_y-M_z.

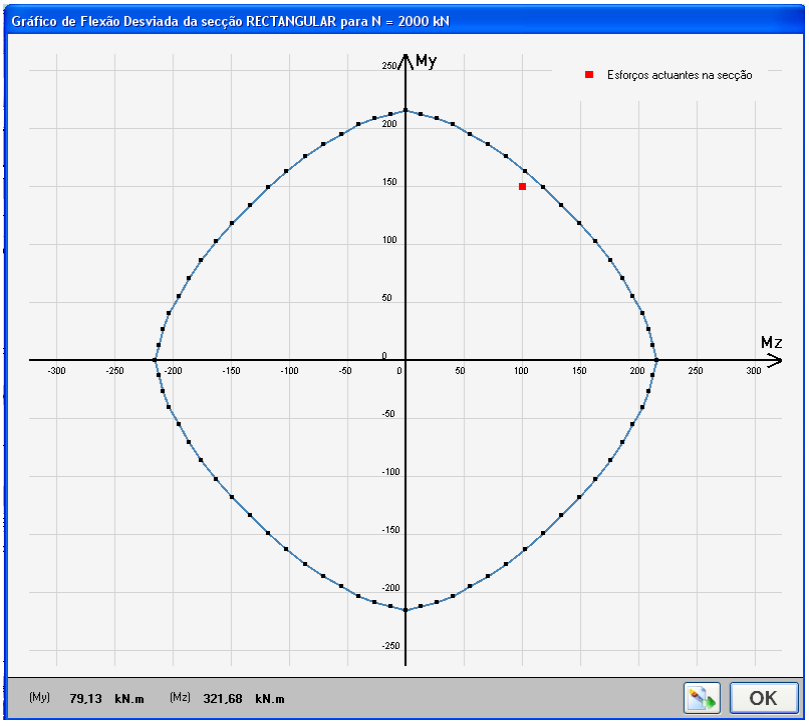
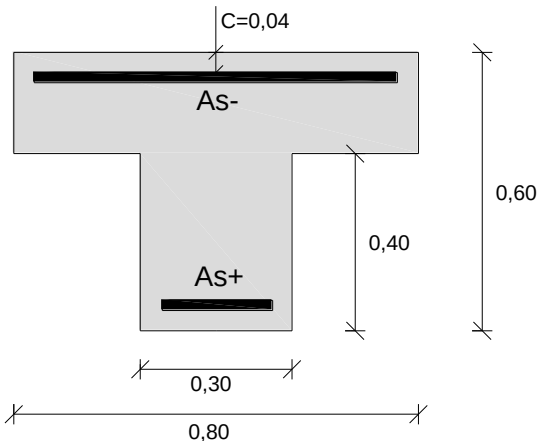


Figura 44. Diagrama de interacção M_y-M_z da secção dimensionada (exemplo 3).

7.4. Exemplo 4 – Dimensionamento de uma secção em T sujeita à flexão composta e esforço transverso

Pretende-se fazer o dimensionamento da secção transversal de um elemento em T com as características indicadas na Figura 45.



Esforços:

N_{Ed} = 1000kN

$M_{y,Ed}$ = 300kN.m

$V_{y,Ed}$ = 200kN

ΔM = 300kN.m

Δx = 2m

Materais:

A500

C30/37

Condições:

$As+ = As- = 0{,}5As_{total}$

Figura 45. Esquema da secção a dimensionar (dimensões em m).

Para efectuar o dimensionamento, o *XCoSec* necessita de definir a posição das armaduras na secção, pelo que o utilizador define a percentagem de armadura a colocar em ambas as faces, inferior e superior ($As+$ e $As-$), e o diâmetro dos varões pretendido para ambas as faces.

Como resultado do dimensionamento da armadura longitudinal, obtém-se a área de aço óptima em cada extremidade ($As+$ e $As-$), a profundidade do eixo neutro (x), o número de varões resultante em cada face para os diâmetros requeridos, o aproveitamento da armadura em termos percentuais (relação entre área de aço óptima e a colocada) para cada face e a taxa de armadura na secção em percentagem. Consequentemente, obtém-se os seguintes resultados: $As+$ = 4,82 cm^2 = 5Ø12, $As-$ = 4,82 cm^2 = 3Ø16, x = 0,099 m, eficiência da armadura superior = 85,28 % e taxa de armadura na secção = 0,34 %.

Como resultados do dimensionamento da armadura transversal, obtém-se a área transversal de aço a colocar na alma (A_{sw}/s) e no banzo (A_{fs}/s), os valores de $cot\theta$ mais favoráveis para ambos os elementos, os esforços máximos admissíveis na secção, dado $cot\theta$ e o espaçamento mínimo a adoptar entre estribos, para ambos os elementos (impondo o diâmetro do varões e o número de ramos a adoptar. No caso particular da alma, obtém-se

ainda a variação da força de compressão no banzo, ΔF_d, e a tensão gerada na interface alma/banzo, ν_{Ed}.

Para a alma, obtêm-se os seguintes resultados: A_{sw}/s = 3,65 cm^2/m, $cot\theta_w$ = 2,50, $V_{Rd,c}$ = 189,47 kN, $V_{Rd,max}$ = 550,58 kN e para 2 ramos com varões Ø6: espaçamento = 15,5 cm. No que diz respeito ao banzo, obteve-se: A_{sf}/s = 1,17 cm^2/m, $cot\theta_f$ = 2,00, ΔF_d = 167,41 kN, ν_{Ed} = 509,51 kPa, $\nu_{Ed,max}$ = 4224,00 kPa e para dois ramos e varões Ø6: espaçamento = 48,3 cm.

A Figura 46 ilustra a secção dimensionada pelo programa.

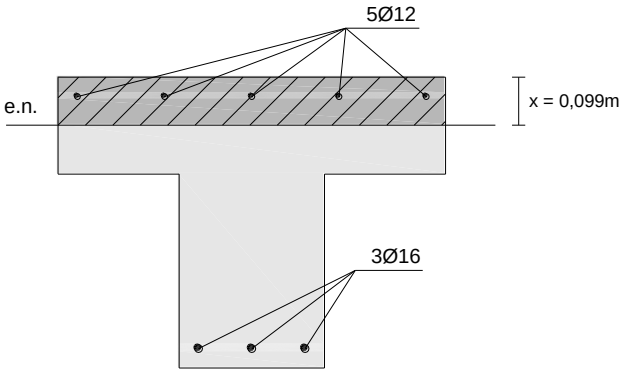


Figura 46. Secção em T após dimensionamento à flexão composta.

A Figura 47 ilustra a introdução de dados no programa, os resultados obtidos e o esquema da disposição de armadura longitudinal na secção.

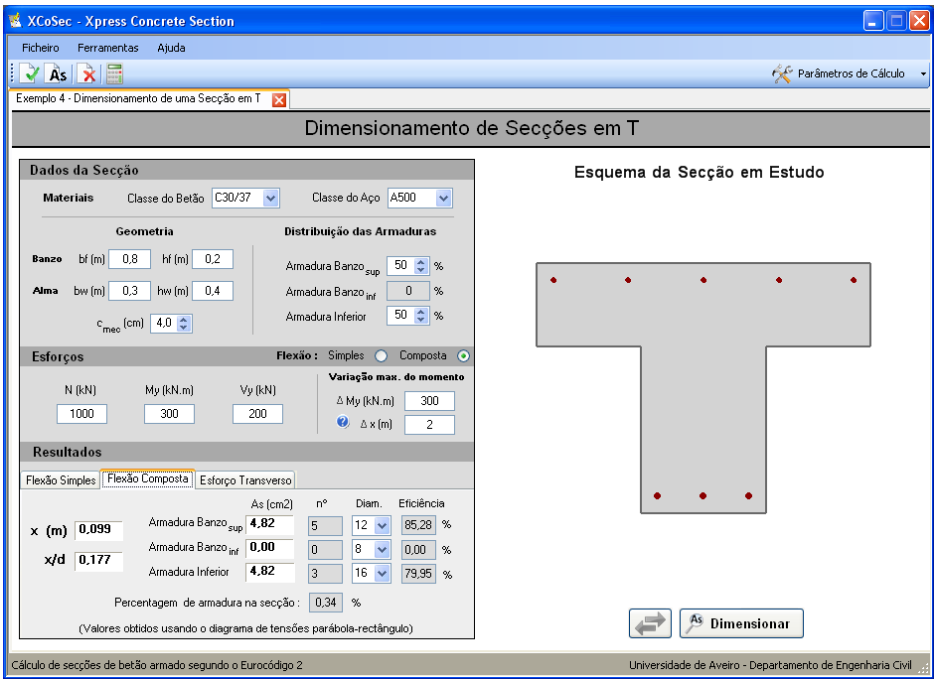


Figura 47. Introdução de dados no programa (Exemplo 4).

O dimensionamento pode ser validado fazendo a verificação da segurança da secção obtida, para a qual se obtém o diagrama de interacção M_y- N da Figura 48.

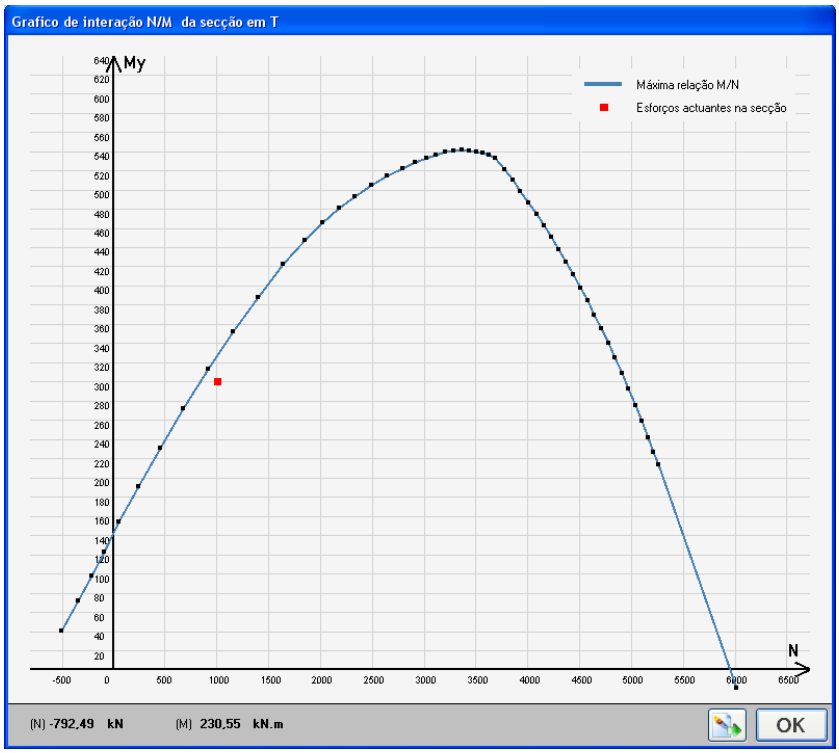


Figura 48. Diagrama de interacção M_y - N da secção dimensionada (exemplo 4).

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

8.1. Conclusões

O programa desenvolvido revela-se robusto e capaz de englobar grande parte dos casos de cálculo e análise de secções transversais de betão armado. A facilidade de utilização imprimida ao programa, torna-o acessível a todos, o que permite estender a sua utilização à realização de cálculos expeditos de análises de esforços, em situações práticas de projecto, bem como no apoio à realização de exercícios académicos.

Os resultados do *XCoSec* foram verificados através de cálculos manuais, recorrendo à utilização de tabelas e ábacos existentes, de fiabilidade comprovada. Em alguns casos, não foi efectuada essa verificação, pelo facto desses elementos não abrangerem todo o tipo de secções. Porém, os resultados consideram-se válidos, devido ao facto dos processos de cálculo implementados serem comuns para todas as situações.

Apesar do *XCoSec* apenas permitir o cálculo em situação de estado limite último, consiste num importante alicerce para o desenvolvimento de novas funcionalidades no âmbito de trabalhos futuros. Nesta óptica, a linguagem de programação adoptada desempenha um papel fundamental, devido à sua fácil extensibilidade e versatilidade, permitindo ao programador efectuar alterações e acrescentar funcionalidades de forma facilitada.

A realização deste trabalho permitiu verificar que a programação é um processo que, uma vez iniciado, pode seguir vários caminhos, alcançar várias metas, mas nunca se considera um processo terminado, existindo sempre algo a melhorar ou acrescentar ao trabalho desenvolvido.

8.2. Desenvolvimentos Futuros

Apesar de concretizados os objectivos propostos, existem ainda diversas funcionalidades de interesse a serem incorporadas, com o intuito de melhorar as potencialidades do *XCoSec*.

A integração de ferramentas para a consideração de armaduras de pré-esforço, o cálculo dos estados limites de utilização, o cálculo de disposições mínimas de armadura, a

possibilidade de introdução manual de materiais e respectivos parâmetros, são exemplos de funcionalidades que contribuiriam para uma maior abrangência do programa. A implementação de uma interface de desenho baseada num programa de CAD, facilitaria a introdução de dados relativos à definição da geometria de secções irregulares, reduzindo o tempo necessário à verificação da segurança desse tipo de secções. A incorporação de outros idiomas no *XCoSec* seria uma mais-valia no âmbito da sua divulgação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Barros, H., Figueiras, J. (2010). *Tabelas e Ábacos de Dimensionamento de Secções de Betão Solicitadas à Flexão e a Esforços Axiais Segundo o Eurocódigo 2.* FEUP edições, Porto, 151 p.

CSI (2009). *Concrete Frame Design Manual-Eurocode 2-2004 For SAP2000®*. Computers and Structures, Inc., 75 p.

Fábio F.Taucer, Enrico Spacone, Filippou, F. C. (1991). *A Fiber Beam-Column Element for Seismic Response Analysis of Reinforced Concrete Structures* Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, 139 p.

Lassala, C. (2010). *Programação Orientada a Objectos em .NET*. http://msdn.microsoft.com/pt-br/library/cc580626.aspx. Visualizado a: 12 de Novembro 2010.

Leite, M., Júnior, N. A. R. (2010). *Programação Orientada a objectos: uma abordagem didáctica.* CESUFOZ, Brasil, 7 p.

Lejano, B. (2007). *Investigation of Biaxial Bending of Reinforced Concrete Columns Through Fiber Method Modeling*. JOURNAL OF RESEARCH IN SCIENCE, COMPUTING AND ENGINEERING, Manila, 12 p.

Liberty, J., MacDonald, B. (2006). *Learning C# 2005*. O'Reilly, Sebastopol, U.S.A., 528 p.

MNE (2007). *Apontamentos da disciplina de métodos numéricos e estatísticos do ano alectivo 2007/2008*. Universidade de Aveiro.

Montoya, P. J., Meseguer, A. G., Cabré, F. M. (2000). *Hormigón Armado*. Editorial Gustavo Gili, Barcelona, Espanha, 844 p.

NP EN 1992-1-1 (2010). *Eurocódigo 2 - Projecto de estruturas de betão. Regras gerais e regras para edifícios*. IPQ, Caparica, 259 p.

Reis, A. C., Farinha, M. B., Farinha, J. P. B. (2007). *Tabelas Técnicas*. Edições Técnicas E. T. L., L, Lisboa, Portugal, 653 p.

Walther, R., Miehlbradt, M. (1990). *Traité de Genie Civil*. Volume 7: Dimensionement de Estrutures en Béton, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, Suiça, 388 p.

Watson, K., Nagel, C., Pedersen, J. H., Reid, J. D., Skinner, M. (2010). *Beginning C# 2010*. Wiley Publishing Inc., Indianapolis, U.S.A., 1037 p.